

A young man with headphones, smiling and holding a large blue pen, stands in front of a background filled with mathematical formulas and a table of numbers. The formulas include the exponential distribution formula, the binomial distribution formula, and the normal distribution formula. The table contains a list of numbers, likely representing a random sample.

Aufgabe 3

a) $F_{\lambda}^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)$ gleichverteilte Zufallszahlen

b) $F_{\lambda}^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)$ exponentialverteilte Zufallszahlen

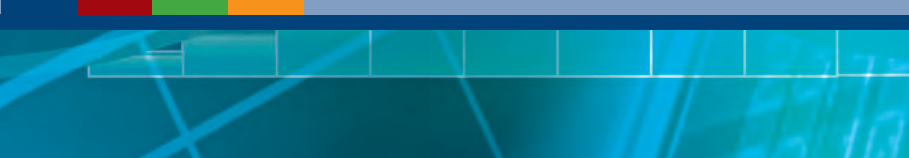
1 2 3 4 5 6 7 8 9 97 98 99 100

0,696414705
0,767685509
0,657302272
0,898888888
0,132943545
0,410488703
0,23131

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\frac{(x-\mu)^2}{2\pi\sigma^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Stochastik. Simulation von Sachschäden.



Versicherungsmathematik in der Praxis –
Band 1

Stochastik. Simulation von Sachschäden.

Prof. Dr. Angelika May, Martin Oymanns

Die Autoren danken Nora Lisse und Thomas Adrian Schmidt
für ihre Mitarbeit.

2. Auflage

© Deutsche Gesellschaft für Versicherungs-
und Finanzmathematik e.V. (DGVFM)
Hohenstaufenring 47 - 51
50674 Köln
www.aktuar.de
info@aktuar.de
Telefon 0221/912554-0
Telefax 0221/912554-44

Prof. Dr. Angelika May, Martin Oymanns
Die Autoren danken Nora Lisse und Thomas Adrian
Schmidt für ihre Mitarbeit.
Grafische Überarbeitung: Eins 64 GbR

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT	6
ERLÄUTERUNGEN ZUR UNTERRICHTSEINHEIT	7
1. DAS PRINZIP VERSICHERUNGEN	8
1.1 Kleine Wirkung, großer Schaden	8
1.2. Versicherung als Tauschgeschäft	9
2. VERSICHERUNGSMATHEMATISCHE GRUNDLAGEN	11
2.1 Der Ausgleich im Kollektiv	11
2.2 Der Erwartungswert führt in den sicheren Ruin	12
2.3 Sicherheitsaufschlag	13
ARBEITSBLATT 1	14
3. STOCHASTISCHE SIMULATION	15
3.1 Diskrete und stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen	15
3.2 Das individuelle Modell	17
3.3 Das kollektive Modell	19
ARBEITSBLATT 2	20
4. STOCHASTISCHE SIMULATION AM BEISPIEL EINES GROSSSCHADENS	21
4.1 Verteilungsannahmen	21
4.2 Simulation von Schadenanzahl und Schadenhöhe	23
ARBEITSBLATT 3	27
LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZU DEN AUFGABEN	25
Lösungen zu Arbeitsblatt 1	25
Lösungen zu Arbeitsblatt 2	26
Lösungen zu Arbeitsblatt 3	28
MATHEMATISCHER ANHANG	30
MATHEMATIK IN VERSICHERUNGEN	32

VORWORT



Edward Rowe Mores
(1731-1778) prägte als
erster den Begriff *actuary*
(engl. = Versicherungs-
mathematiker).

*Im Arbeitskreis Stochastik
der Gesellschaft für
Didaktik der Mathematik
engagieren sich Vertreter
aus Hochschulen,
Ausbildungsseminaren
und Schulen für die
Verbesserung des
Stochastikunterrichts.*

Mit dieser Unterrichtseinheit zur Versicherungsmathematik bereiten wir ein spannendes Feld moderner angewandter Mathematik für die Schulpraxis auf. Die Frage nach der Versicherbarkeit von Risiken ist seit jeher ein wichtiges Thema in der Gesellschaft und tritt in unserem Lebensalltag in einer Vielzahl von Situationen auf. So kommen die Meisten bereits als Schülerinnen und Schüler das erste Mal selbst mit Versicherungen in Berührung, z. B. wenn es um den Abschluss einer Haftpflicht-Versicherung für das eigene Mofa oder einer Krankenversicherung für die Berufsausbildung geht. Versicherungen sind heutzutage ein selbstverständlicher Teil unseres Lebens ohne dass immer eine Vorstellung von den eigentlichen – insbesondere mathematischen – Mechanismen hinter dem Prinzip Versicherung besteht. Hier vermittelt die vorliegende Unterrichtseinheit am Beispiel der Sachversicherung eine grundlegende Vorstellung wie der für die Versicherung zu erwartende Gesamtschaden sowie eine angemessene Prämie kalkuliert werden können.

Versicherungsmathematik – oder auch **aktuarielle** Mathematik – ist ein Teilgebiet der Mathematischen Stochastik. Sie wird täglich von vielen Aktuarinnen und Aktuaren in Unternehmen der Finanzdienstleistungsbranche eingesetzt. Diese sind Experten, die sich zumeist auf Basis eines Mathematikstudiums für die speziellen Anforderungen in den jeweiligen Aufgabengebieten der Versicherungsbranche weitergebildet haben. So stellen sie z. B. bei der Gestaltung einer Versicherungsprämie sicher, dass das Unternehmen die von den Kunden übernommenen Risiken auch tragen kann. Dabei werden eine Vielzahl von Methoden aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Mathematischen Statistik eingesetzt.

Der **Arbeitskreis Stochastik** hat zur Leitidee „Daten und Zufall“ für die Sekundarstufe II in seinen Bildungsstandards sieben Kernkompetenzen formuliert, von denen drei hier vertieft werden:

- Modellieren zufälliger Vorgänge mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren charakteristischen Kennzahlen
- Nutzen von Simulationen, um Näherungslösungen für komplexe Situationen zu gewinnen
- Grundphänomene zum Gesetz der großen Zahlen

Moderner Stochastikunterricht zielt damit auf die Kompetenz, auf Daten und Wahrscheinlichkeiten basierende Entscheidungen zu treffen.

Ergebnisse aus der mathematikdidaktischen Forschung belegen, dass die vielfach geforderten komplexen Anwendungsaufgaben „aus der Praxis“ zum einen so gestellt sein müssen, dass die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse über (stochastische) Basis-konzepte einsetzen können, zum anderen, dass die Aufgabenstellung begrifflich an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler anschließt. Der damit verknüpften Fragestellung nach der inhaltlichen Relevanz von Aufgaben zur aktuariellen Mathematik begegnen wir in diesem Band, indem wir die benötigten Hintergrundinformationen zum Thema Versicherung bereitstellen bzw. die Schülerinnen und Schüler recherchieren lassen.

Prof. Dr. Angelika May
Universität Oldenburg
Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V.

ERLÄUTERUNGEN ZUR UNTERRICHTSEINHEIT

Begründung und Relevanz der Unterrichtseinheit

Die Inhalte sind aufbereitet für den Einsatz in Schülergruppen, die über Grundkenntnisse in Stochastik verfügen. Wegen seiner kompakten und in sich abgeschlossenen Darstellung eignet sich die Unterrichtseinheit besonders für den Einsatz in Projektwochen oder Vertretungsphasen sowie als optionaler Stoff für die Zeit nach der Notenvergabe. Einzelne Inhalte, insbesondere zur stochastischen Simulation, können als Ausgangspunkt für Facharbeiten gewählt werden. Das Thema eignet sich auch für Mathematik AG's oder Zirkel.

Aufbau

Angelehnt an die drei im Vorwort formulierten Kernkompetenzen ist diese Unterrichtseinheit wie folgt aufgebaut: Essentiell für das auskömmliche Funktionieren von Versicherungen ist der sog. **Ausgleich im Kollektiv und in der Zeit**. Dieser wird dadurch garantiert, dass viele Versicherte (des Kollektivs) Prämien zahlen und die Schadenfälle nicht alle gleichzeitig eintreten. Eine grundlegende Voraussetzung für das Verständnis von versicherungsmathematischer Kalkulation ist der Zusammenhang zwischen den Kenngrößen (**Momenten**) einer Zufallsgröße, die den Schaden modellieren, und der von den Versicherungsnehmern zu zahlenden deterministischen (d. h. nicht zufälligen) Prämie. Nach einigen grundlegenden Überlegungen in Lehrmodul 1 behandeln wir dies vertieft in Lehrmodul 2.

Um die Momente **Erwartungswert** und **Varianz** berechnen zu können, müssen Annahmen an die zugrunde liegende Verteilung der zu modellierenden Schadensgröße getroffen werden, da diese zumeist im Vorhinein unbekannt ist. Im Gegensatz zu einer diskreten Verteilung (z. B. beim Würfelwurf) handelt es sich hierbei um stetige Verteilungen. Dabei erweist sich allerdings gerade die „beliebte“ Normalverteilung als nicht geeignet. Hiermit setzen wir uns in Lehrmodul 3 auseinander. Dort wird zudem auch vorgestellt, wie Excel für die Modellierung des Gesamtschadens eingesetzt werden kann.

In Lehrmodul 4 wird dann gezeigt, wie finanziell besonders gravierende Großschäden mathematisch berücksichtigt werden können.

Die Aufgabenblätter (mit Lösungen) sollen zum Einüben der stochastischen Techniken ermutigen, aber auch den oben formulierten Anschluss an die Begriffswelt Versicherung herstellen.

Im Anhang werden noch einmal die wichtigsten grundlegenden Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie erläutert sowie einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihre Eigenschaften im Detail angegeben.

Erwartungswert und Varianz werden auch erstes und zweites Moment einer Zufallsgröße genannt.

Zufallsexperimente, die nur eine abzählbare Anzahl von möglichen Ausgängen besitzen, nennen wir diskret.

1. DAS PRINZIP VERSICHERUNGEN

1.1 Kleine Wirkung, großer Schaden

Ganz allgemein decken (Sach-)Versicherungen in der Zukunft liegende, in der Höhe heute unbekannte und potenziell Existenz gefährdende Schäden ab. Ein einführendes Beispiel aus dem Bereich der privaten Haftpflichtversicherung illustriert, worum es geht:

An einem Feriensonntag spielen zwei Kinder auf dem Dach eines Schulgebäudes mit einem brennenden Tennisball. Unglücklicherweise entzündet der Ball das Dach der Schule, die daraufhin bis auf die Grundmauern abbrennt. Beide überleben die Katastrophe unverletzt und, da es ein Sonntag war, gab es keine weiteren Verletzten. Aber es ist ein hoher Sachschaden entstanden:

Der Wiederaufbau der Schule kostet geschätzt 6 Millionen €; jedes der beiden Kinder müsste demnach für jeweils 3 Millionen € aufkommen. Verdienen ihre Eltern 3.000 € pro Monat und würden sie ihr gesamtes Gehalt zur Rückzahlung einsetzen, so bräuchten beide Familien etwa 1.000 Monate, das sind etwa 83 Jahre, für die Rückzahlung des Schadens.

An dieser Stelle kommt die Privathaftpflichtversicherung der Eltern ins Spiel, die den Schaden trägt. Die Prämie dafür kostet etwa 100 € pro Jahr.

Eine Versicherungsgesellschaft kann nur dann höhere Schäden bezahlen, wenn sie genügend hohe Prämieinnahmen erwirtschaftet. Es ist also eine notwendige Voraussetzung, dass eine Vielzahl von versicherten Personen bei dem Unternehmen eine entsprechende Versicherung abgeschlossen hat.

*Um den Schaden für eine der Familien zu tragen, müssen
 $3.000.000 \text{ €} : 100 \text{ € (pro Jahr)} = 30.000 \text{ (Familien)}$
 den Schaden gemeinsam tragen.*

*Beim **Ausgleich in der Zeit** erfolgt ein Risikoausgleich durch die Betrachtung über einen längeren Zeitraum.*

Dies geschieht in der Realität auch. Dass Versicherungen u. a. eine Privathaftpflichtversicherung zu einem für Versicherte bezahlbaren Preis anbieten können, zeigt, dass das Prinzip des Ausgleichs im Kollektiv und in der Zeit funktioniert, aber sicherlich auch, dass solche großen Schäden in der Regel (in der Privathaftpflichtversicherung) eher selten auftreten.

Versicherung als Tauschgeschäft 1.2

Allgemein lässt sich aus dem vorhergehenden Beispiel folgendes ableiten:

Grundsätzlich sind an einer Versicherung zwei Parteien beteiligt: die versicherte Person (Versicherungsnehmer) und das Versicherungsunternehmen. Der Versicherungsnehmer schließt dabei mit dem Versicherungsunternehmen einen Vertrag ab, um sich gegen ein Risiko finanziell abzusichern.

Die beiden Parteien tauschen also ein Risiko mit möglicherweise hohen finanziellen Auswirkungen gegen eine vergleichsweise geringe Prämie. Dieses Tauschgeschäft wird möglich, weil gleichzeitig viele Personen beim Versicherungsunternehmen einen Vertrag abschließen.

Die finanzielle Gegenleistung durch das Versicherungsunternehmen erfolgt bei Eintritt eines vertraglich vereinbarten Ereignisses; in der Sachversicherung wird diese in der Regel vom Umfang des eingetretenen Schadens bestimmt. Da die Zukunft unbekannt ist, ist der zukünftige Schaden eine zufällige Größe.

Für den Versicherungsnehmer wird es sich eher lohnen, eine Versicherung abzuschließen, wenn die zu zahlende Prämie im Verhältnis zur Höhe des potentiell auftretenden Schadensbedarfs möglichst niedrig ist.

Hierbei entsteht ein gewisser Widerspruch zum Interesse des Versicherungsunternehmens eine Prämie zu erheben, die für die zukünftigen Zahlungen ausreicht. Prämien, die nicht ausreichen, führen im schlimmsten Falle zum Ruin des Versicherungsunternehmens und würden damit in letzter Konsequenz den von dem Versicherungsnehmer angestrebten Schutz gefährden.

Zudem ist aus heutiger Sicht des Versicherungsunternehmens unklar, wie die zukünftige Zahlung an den Versicherungsnehmer aussehen wird. Daher ist es wichtig, dass dem Versicherungsunternehmen eine Datengrundlage vorliegt, die zur Schätzung des zukünftigen Bedarfs herangezogen werden kann. Damit können wir festhalten:

Der zukünftige Geldbedarf ist zwar sowohl vom Eintritt als auch von der Höhe her ungewiss, muss aber insgesamt für den Versicherer schätzbar sein.

Versicherungsschutz:
Ein Geldbetrag (die Prämie des Versicherten) wird gegen eine zukünftige Zahlung in zufälliger Höhe (die Leistung des Versicherers) eingetauscht.



Wie bereits erwähnt, wird für diese Schätzung das Grundprinzip des Risikoausgleichs herangezogen. Durch Zusammenfassung mehrerer gleichartiger Risiken in einen Bestand entsteht ein Ausgleich der Einzelrisiken, so dass die Gruppe einzelne Schäden besser tragen kann. In der Tat hat dieser Gedanke der Solidarität schon früh zu Vorläufern der heutigen Versicherung geführt, etwa als Begräbnisverein bei den Phöniziern, bei Steinmetzen in Ägypten oder bei den mittelalterlichen Zünften und Gilden, die ihren Mitgliedern Unterstützung bei Krankheit und Tod gewährten.

Der Ausgleich im Kollektiv garantiert also, dass Prämien gleichzeitig niedrig und für den Versicherten auskömmlich sein können.



VERSICHERUNGS- MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

Der Ausgleich im Kollektiv

2.

2.1

Wie funktioniert nun der Tausch eines festen Betrags gegen eine Zufallsgröße?

Im Folgenden sei Z_i , für $i = 1, \dots, n$, die Zufallsgröße der möglichen Schäden, die in einem Bestand von n Versicherten beim jeweils i -ten Versicherten auftreten können. Um eine Prämie bestimmen zu können, die über alle Versicherungsnehmer betrachtet den Jahresgesamtschaden abdeckt, interessieren wir uns in einem ersten Schritt für den Mittelwert der im Bestand auftretenden Schäden

$$\bar{Z} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

Bei der Bestimmung dieser Größe für große n hilft uns das Gesetz der großen Zahlen. In seiner empirischen Form besagt es, dass der Mittelwert gegen einen konstanten Wert strebt, wenn der Bestand hinreichend viele Personen umfasst (je mehr Personen, desto genauer ist die Approximation).

Somit können wir den auftretenden Gesamtschaden mit großer Sicherheit im Vorhinein bestimmen und die Prämie pro Versicherungsnehmer auf Basis dieser Überlegungen festsetzen. Aus dieser Erkenntnis resultiert

Viele Versicherte, die sich gegen gleichartige Risiken bei demselben Unternehmen versichert haben, bilden einen Bestand.

*Zur Erinnerung:
Der Erwartungswert ist linear, d. h. es gilt
 $E[aX+bY] = a E[X] + b E[Y]$*

das erste versicherungsmathematische Kalkulationsprinzip:

Die Bedarfsprämie B für einen Versicherungsnehmer ist gleich dem zu erwartenden Schaden, also dem Erwartungswert $E[\bar{Z}]$, d. h.

$$B = E[\bar{Z}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[Z_i]$$

Mit anderen Worten kommen die Versicherungsnehmer damit für ihren erwarteten Schaden selber auf. Dieses Phänomen bezeichnet man als Ausgleich im Kollektiv, d. h. das Gesetz der großen Zahlen sichert uns die Auskömmlichkeit des Prinzips Versicherung.

Neben dem Ausgleich im Kollektiv sorgt auch der Ausgleich in der Zeit bei einer Betrachtung der Schäden eines Unternehmens über mehrere Jahre für eine Absicherung.

Um die Formeln möglichst einfach zu gestalten, wird hier auf eine Berücksichtigung dieses Aspekts verzichtet.

Wir sind somit in der Lage, wenn wir die zugrunde liegende Verteilung der auftretenden Schäden in einem Bestand ermitteln können, den jährlich zu erwartenden Gesamtschaden zu bestimmen, indem wir die erwarteten Schäden pro Versicherungsnehmer über den gesamten Bestand aufsummieren.

2.2 Der Erwartungswert führt in den sicheren Ruin

Ist B nun die Prämie, welche das Versicherungsunternehmen tatsächlich vom Versicherungsnehmer erheben kann?

Leider nein, wie uns ein weiteres Ergebnis aus der Stochastik, die **Normalverteilungsapproximation**, zeigt:

Sie besagt, dass zentralisierte (Erwartungswert gleich Null) und normalisierte (Varianz gleich Eins) Summen von gleichverteilten Zufallsgröße annähernd normalverteilt sind:

$$P\left(\frac{\bar{Z}-B}{\sqrt{\text{var}[\bar{Z}]}} \geq \varepsilon\right) \approx 1 - \Phi(\varepsilon) \approx 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2} \text{ für kleine } \varepsilon > 0$$

Das bedeutet für unseren Fall, dass die Bedarfsprämie langfristig nur mit 50%iger Wahrscheinlichkeit für die Deckung aller entstandenen Schäden ausreicht! Oder anders ausgedrückt: Ein Versicherungsunternehmen, das nur die Bedarfsprämie erhebt, geht mit Sicherheit „langfristig“ in den finanziellen Ruin.



Sicherheitsaufschlag 2.3

Eine auskömmliche Tarifierung erfordert also einen Aufschlag auf die Bedarfsprämie, den Risikoaufschlag. Daraus ergibt sich

das zweite versicherungsmathematische Kalkulationsprinzip:

Die **Risikoprämie** (P) für einen Versicherungsnehmer ist gleich dem erwarteten Schaden plus einem **Sicherheitsaufschlag** δ , d. h.

$$P = E[\bar{Z}] + \delta$$

Es mag in gewisser Weise unbefriedigend erscheinen, eine Prämie zu einem Risiko nur vom Erwartungswert abhängig zu machen, heißt das doch insbesondere, dass viele mittlere Schäden zur gleichen Prämie führen wie (im Extremfall) 1 großer und 1 kleiner Schaden. Dennoch macht der Erwartungswert als Bezugsgröße dann Sinn, wenn keine weiteren Informationen über die **Verteilung** des Risikos vorliegen.

Möchte man jedoch die oben angesprochene Aufteilung auf große und kleine Schäden in die Prämienhöhe einbeziehen, so benötigt man Informationen über die **Streuung** des Risikos und kann in diesem Falle ein alternatives Konzept verwenden,

das Varianzprinzip:

Die **Risikoprämie** (P) für einen Versicherungsnehmer ist gleich dem erwarteten Schaden plus einem **Sicherheitsaufschlag** a mal der Varianz des Schadens als Streuungsmaß, d. h.

$$P = E[\bar{Z}] + a \operatorname{Var}[\bar{Z}]$$

Für die reale Prämienkalkulation bedeutet das, dass sie umso zutreffender ist, je mehr Informationen über die Schäden vorliegen, je besser also vorliegende Daten ausgewertet werden können. Die Bestimmung von Erwartungswert und Varianz gelingt besonders gut, wenn eine plausible Vermutung über die Verteilung der Schäden vorliegt. Solche Verteilungsannahmen werden in den Lehrmodulen 3 und 4 eine zentrale Rolle spielen.

Im Folgenden nehmen wir nun an, dass die jeweiligen Schäden jeweils unabhängig voneinander auftreten und die gleiche Verteilung besitzen. Das bedeutet, die dazugehörigen Zufallsgrößen Z_i sind unabhängig identisch verteilt. Insbesondere besitzen dadurch alle Z_i den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz.

Mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes kann man eine Formel herleiten, die einen direkten Zusammenhang zwischen der **Ruinwahrscheinlichkeit** und dem **Sicherheitszuschlag** herstellt, der häufig in der Größenordnung von 30% liegt.

Zur Erinnerung:
Zwei Zufallsgrößen X und Y heißen **stochastisch unabhängig**, wenn für alle Ereignisse A und B gilt:
 $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$

ARBEITSBLATT 1

Aufgabe 1:

Überlegen bzw. recherchieren Sie, welchen Risiken Ihre Familie ausgesetzt ist und ob diese Risiken versicherbar sind.

Aufgabe 2:

Erinnern Sie sich an große Versicherungsschäden in der letzten Zeit? Welche? Wie hoch waren die in den Medien genannten, geschätzten Schäden bzw. Versicherungssummen? Was finden Sie im Internet unter dem Stichwort „Wiehlalbrücke“?

Aufgabe 3:

Beschreiben Sie in eigenen Worten, warum Versicherungen nur wegen des Ausgleichs im Kollektiv funktionieren. Welche anderen Voraussetzungen müssen gelten, damit man von einer Versicherung sprechen kann?

Aufgabe 4: Das Kinofinanzierungsproblem

Julia, Thomas und Antonio studieren Mathe und gehen gern zusammen ins Kino. Sie arbeiten nebenbei als Aushilfskräfte, wann immer möglich. Dies ist jedoch nicht immer möglich, sodass sie öfters kein Geld für den wöchentlichen Kinobesuch haben. Sie beschließen daher, sich untereinander gegen das Ereignis „Kein Geld für den wöchentlichen Kinobesuch“ zu versichern.

Diskutieren Sie, ob die folgenden Ideen dazu eine sinnvolle Versicherung im obigen Sinne definieren oder begründen Sie, warum eine Grundvoraussetzung verletzt ist:

- a) Alle drei zahlen einen Betrag in eine gemeinsame Kasse, aus der sie das nicht-vorhandene Kinogeld ersetzen.
- b) Sie überreden ihren Kommilitonen Arthur, der immer pleite ist, und Martina, die stets genug Geld zur Verfügung hat, in ihrer Zweckgemeinschaft mitzumachen. Bilden die fünf dann eine Versichertengemeinschaft?
- c) In den letzten zwei Jahren passierte es besonders oft, dass sie in den Semesterferien keine Arbeit zum Geld verdienen fanden. Die drei Freunde beschließen, dass es ausreicht, sich nur für diese Zeit bei der Xtra*Ltd. (London) zu versichern, die immer für innovative Ideen rund ums Geld zu haben ist. Um die Prämie gering zu halten, suchen sie sich unter ihren 1.500 Mitstudenten diejenigen aus, die genauso viel aus ihrem Job erhalten wie sie selbst. Das sind 139 Kommilitonen, von denen sie 34 überreden können, sich bei der Xtra*Ltd. mitzuversichern.

Wenn Sie die Xtra*Ltd. wären, würden Sie Julia und ihren beiden Freunden diesen Vertrag anbieten?

STOCHASTISCHE SIMULATION

Diskrete und stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

3.

3.1

In diesem Lehrmodul zeigen wir, wie in einem Bestand von n Versicherten der Jahresgesamtschaden S stochastisch simuliert werden kann. Abschließen werden wir das Kapitel, indem wir die einzelnen Schritte als Übungsaufgabe in Excel nachvollziehen.

Die **Binomialverteilung**, eine der wichtigsten **diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen**, beschreibt die Anzahl der Erfolge bei einer Serie von unabhängigen **Bernoulli**-Versuchen. Tritt das Ereignis „Erfolg“ mit einer Wahrscheinlichkeit von $p \in (0,1)$ ein, so beschreibt die Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass bei n unabhängigen Bernoulli-Versuchen k -mal das Ereignis „Erfolg“ eintritt. Diese Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ für } k=0, \dots, n$$

wobei Z gleich der Anzahl der Erfolge ist. Um eine binomialverteilte Zufallsgröße Z zu erzeugen, erzeugen wir zunächst n Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen. Hierfür ziehen wir zufällig Zahlen aus dem Intervall $(0;1)$, wobei die Ziehung jeder Zahl gleich wahrscheinlich sein muss. Ist die gezogene Zahl kleiner als p , so erhält die Bernoulli-verteilte Zufallsgröße den Wert 1, ist sie jedoch größer als p , so notieren wir den Wert 0. Auf diese Weise konstruieren wir n Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen, also eine Folge von n Zahlen, die den Wert 0 oder 1 haben. Durch Summation erhalten wir dann unsere binomialverteilte Zufallsgröße Z .

Für die Umsetzung des oben skizzierten Verfahrens können wir Excel nutzen, wie wir auf dem nächsten Aufgabenblatt sehen werden.

Für die Erzeugung von Zufallszahlen, die einer **stetigen Verteilung** mit invertierbarer (umkehrbarer) Verteilungsfunktion F genügen, verwenden wir die **Inversionsmethode**.

Hierbei werden zunächst auf dem Intervall $(0;1)$ gleichverteilte Zufallszahlen u erzeugt, die danach in die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion eingesetzt werden. Die zufälligen Realisierungen x der Zufallsgröße X , die einer stetigen Verteilung mit Verteilungsfunktion F genügen, werden berechnet durch

$$x = F^{-1}(u), u \in (0;1)$$



Jakob Bernoulli
(1654-1705)

Bei einem Bernoulli-Experiment gibt es nur zwei mögliche Ausgänge: „Ereignis tritt ein“ und „Ereignis tritt nicht ein“, oftmals auch mit Erfolg“ und „Nicht-Erfolg“ oder schlicht mit „0“ und „1“ bezeichnet.

Für die Umkehrfunktion F_X^{-1} zu einer streng monotonen Funktion F_X , gilt $F_X^{-1}(F_X(x)) = x$ für alle x .

Die so erzeugten Zufallszahlen benötigen wir im Folgenden für die Simulation eines Versicherungsbestands. Dazu veranschaulichen wir uns die Inversionsmethode noch einmal anhand der **Exponentialverteilung**.

Diese gehört zu den stetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ist auf den positiven reellen Zahlen konzentriert. Eine Zufallsgröße Z folgt einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, wenn sie die Dichtefunktion f_λ und die Verteilungsfunktion F_λ besitzt mit

$$f_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad F_\lambda(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$

Erwartungswert und Varianz bei der Exponentialverteilung errechnen sich wie folgt:

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad \text{Var}[Z] = \frac{1}{\lambda^2}$$

Für die Inversionsmethode benötigen wir nun die Umkehrfunktion F_λ^{-1} von F_λ . Für die Exponentialverteilung ergibt sich

$$F_\lambda^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u) \quad \text{für } u \in (0,1)$$

Auf die beschriebene Art können natürlich auch Zufallszahlen generiert werden, die einer anderen stetigen Verteilung genügen, immer vorausgesetzt, die Umkehrfunktion der jeweiligen Verteilungsfunktion lässt sich berechnen.



Das individuelle Modell 3.2

Nachfolgend betrachten wir ein Versicherungsunternehmen, das einen homogenen Bestand versichert. Weiter nehmen wir an, dass insgesamt n Versicherungsnehmer bei dem Versicherungsunternehmen versichert sind, somit die Größe des Bestandes n ist.

Die Schadenhöhen für die einzelnen Versicherungsnehmer werden wieder mit der Zufallsgröße Z_i bezeichnet. Pro Jahr kann in unserem Modell nur maximal ein Schaden pro Versicherungsnehmer auftreten. Aus Sicht des Versicherungsunternehmens lässt sich die Zufallsgröße S , die den Jahresgesamtschaden unseres Bestands von Versicherten beschreibt, darstellen als

$$S = \sum_{i=1}^n Z_i$$

An dieser Stelle sind für das Versicherungsunternehmen zwei Fragen besonders interessant:

- Wie sind die Einzelschäden Z_i verteilt?
- Welcher Verteilung folgt der Jahresgesamtschaden S ?

Die Verteilung der Einzelschadenhöhen lässt sich in der Regel aus der Schadenhistorie mit geeigneten Methoden schätzen. Wir unterstellen daher im Folgenden, dass die Verteilung der Zufallsgröße Z_i bekannt ist.

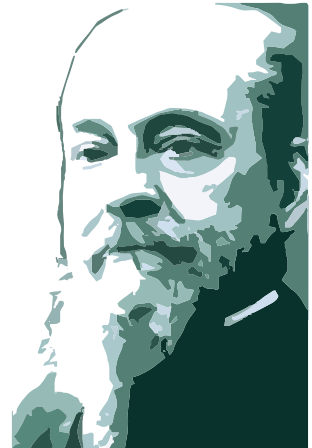
Bei der Wahl der Verteilung muss jedoch darauf geachtet werden, dass die Schadenhöhen stets als positiv angenommen werden, da natürlich keine negativen Schäden auftreten können. Deshalb ist in diesem Zusammenhang z. B. die Normalverteilung zur Modellierung der Schadenhöhen ungeeignet. Gerade im Zusammenhang mit großen Schäden, die bei Naturkatastrophen entstehen können, wird daher in der Praxis oft die Exponentialverteilung oder die sogenannte **Pareto-Verteilung** eingesetzt, der wir in Lehrmodul 4 wieder begegnen werden.

Für die Bestimmung der Versicherungsprämie mittels des Varianzprinzips benötigen wir nur den Erwartungswert und die Varianz des Jahresgesamtschadens. Wie bereits erwähnt nehmen wir an, dass die Einzelschäden Z_i unabhängig und wie ein Regelschaden Z identisch verteilt sind.“

Die linearen Eigenschaften des Erwartungswerts führen zu folgender Gleichung:

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^n Z_i\right] = \sum_{i=1}^n E[Z_i] = n \cdot E[Z_1] = n \cdot E[Z]$$

Bei einem homogenen Bestand folgen die einzelnen Schäden der gleichen Verteilung und treten unabhängig voneinander auf.



Vilfredo Pareto
(1848-1923)

Der Erwartungswert des Jahres gesamt Schadens ergibt sich als die Summe der Erwartungswerte der Einzelschäden, d. h. $n \cdot E[Z]$.

Die Varianz des Jahresgesamt Schadens lässt sich ebenfalls gut bestimmen, wenn die Varianz der Einzelschäden bekannt ist. Hierfür ergibt sich aufgrund der Unabhängigkeit der Einzelschadenhöhen

$$\text{Var}[S] = \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n Z_i\right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[Z_i] = n \cdot \text{Var}[Z_1] = n \cdot \text{Var}[Z]$$

Im konkreten Fall exponentialverteilter Einzelschadenhöhen

(zur Erinnerung $E[Z] = \frac{1}{\lambda}$ und $\text{Var}[Z] = \frac{1}{\lambda^2}$)

ergibt sich für den Jahresgesamt Schaden

$$E[S] = \frac{n}{\lambda} \text{ und } \text{Var}[S] = \frac{n}{\lambda^2}$$

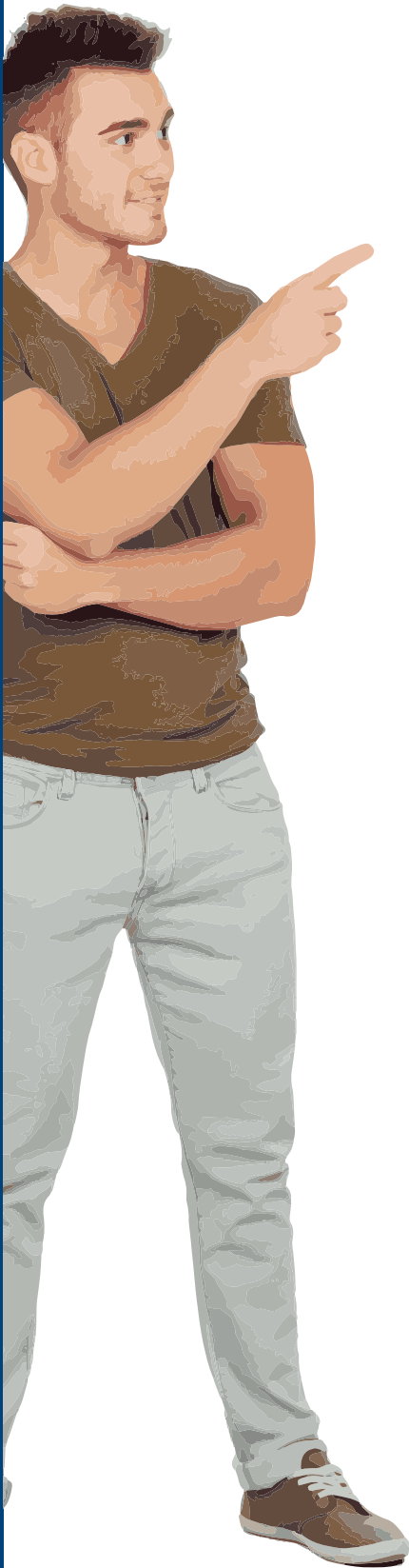
Berechnet man unter diesen Voraussetzungen die Prämie P für einen Versicherten nach dem Varianzprinzip, so ergibt sich:

$$P = \frac{1}{n} (E[S] + a \cdot \text{Var}[S]) = \frac{1}{\lambda} + \frac{a}{\lambda^2}$$

Allerdings haben wir bisher einen Punkt noch gar nicht berücksichtigt. Tatsächlich ist die Exponentialverteilung nicht uneingeschränkt geeignet, um die Schadenhöhe zu modellieren, denn sie ordnet dem Ereignis „Kein Schaden tritt auf“ die Wahrscheinlichkeit 0 zu.

Dies entspricht natürlich nicht den allgemeinen Beobachtungen in einem realen Bestand von Versicherten. Beschränkt man sich aber lediglich auf die Fälle, in denen tatsächlich Schäden aufgetreten sind, können wir die Exponentialverteilung nach wie vor für die Höhe der eingetretenen Schäden verwenden.

Dieses Vorgehen hat jedoch zur Folge, dass wir nun keine feste Zahl n von Versicherten mehr betrachten, sondern stattdessen eine zufällige Anzahl N von aufgetretenen Schäden in einem Jahr innerhalb dieses Bestands berücksichtigen müssen. Somit müssen wir zusätzlich zu der Verteilung der Schadenhöhe nun auch die Verteilung der Schadenanzahl simulieren. Diese Erweiterung führt uns im nächsten Kapitel zum **kollektiven Modell**.



Das kollektive Modell 3.3

Wir behalten sämtliche Voraussetzungen aus dem vorhergehenden Modell bei, außer dass wir nun eine weitere Zufallsgröße N einführen, die uns die Anzahl der insgesamt aufgetretenen Schäden in einem Jahr in unserem Bestand von n Versicherten angibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Versicherten ein Schaden auftritt, beträgt $p \in (0;1)$ und ist nach den Überlegungen im vorherigen Lehrmodul Bernoulli-verteilt. Uns interessiert nun die Anzahl N der tatsächlich im Bestand aufgetretenen Schäden. Dies führt uns wieder, wie bereits gezeigt, zur Binomialverteilung. Mit der Zufallsgröße Z_i werden jetzt die Schadenhöhen der einzelnen Schäden bezeichnet.

Damit können wir den Jahresgesamtschaden für das kollektive Modell umformulieren zu

$$S = \sum_{i=1}^N Z_i$$

wobei N nun diesmal keine feste Zahl ist, sondern eine binomialverteilte Zufallsgröße, die als unabhängig von den Einzelschadenhöhen Z_i angenommen wird.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass der Unterschied zwischen dem individuellen und dem kollektiven Modell darin liegt, dass in Ersterem die Summe eine deterministische Anzahl von Summanden besitzt und Nullen („Schäden mit Höhe 0“) als Summanden auftreten können, während im kollektiven Modell lediglich die wirklich eingetretenen Schäden betrachtet werden und daher die Summe eine zufällige Anzahl von Summanden besitzt.

*Zur Erinnerung:
Bei der Binomialverteilung mit Parameter n und p ist der Erwartungswert gleich np und die Varianz gleich $np(1-p)$.
(vgl. Anhang)*

Im kollektiven Modell beeinflussen also zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen die Verteilung des Jahresgesamtschadens: die Verteilung der Schadenanzahl N und die der Regelschadenhöhe Z , die wir als exponentialverteilt angenommen haben. Für Erwartungswert und Varianz des Jahresgesamtschadens ergibt sich dadurch eine etwas kompliziertere Darstellung:

$$E[S] = E[N] \cdot E[Z] \quad \text{und} \quad \text{Var}[S] = E[N] \cdot \text{Var}[Z] + \text{Var}[N] \cdot (E[Z])^2$$

Diese zwei Formeln sind auch als die **Gleichungen von Wald** (Abraham Wald 1902 – 1950) bekannt.

In unserem konkreten Fall ergibt sich durch direktes Einsetzen:

$$E[S] = \frac{np}{\lambda} \quad \text{und} \quad \text{Var}[S] = \frac{np}{\lambda^2} + \frac{n(1-p)}{\lambda^2} = \frac{n(2-p)}{\lambda^2}$$

Auch hier können wir also den Erwartungswert und die Varianz vom Jahresgesamtschaden bestimmen. Dies ist wiederum ausreichend, um die Prämie mit dem Varianzprinzip zu berechnen:

$$P = \frac{1}{n} (E[S] + a \cdot \text{Var}[S]) = \frac{p}{\lambda} + \frac{ap(2-p)}{\lambda^2}$$

ARBEITSBLATT 2

Aufgabe 1:

Wir beginnen mit der Simulation einer binomialverteilten Zufallszahl:

Eine nach X verteilte Zufallszahl x ist eine Realisierung der Zufallsgröße X . Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass wir eine bestimmte Zufallszahl x erhalten, durch die Verteilung von X gegeben ist.

- a) Erzeugen Sie in Excel $n = 100$ gleichverteilte Zufallszahlen u_i auf dem Intervall $(0;1)$.
Tipp: Hilfreich ist hierbei die vordefinierte Funktion ZUFALLSZAHN().

- b) Definieren Sie in einer neuen Spalte eine neue Funktion, die folgendes leistet:
Ist $u_i \leq 0,1$ (allgemein: p), dann wird in der Spalte eine 1 eingetragen;
ist $u_i > 0,1$, dann eine 0. **Tipp: Hier hilft die Funktion WENN().**

Die so erhaltenen Zufallszahlen x_i sind Bernoulli-verteilt.

- c) Berechnen Sie $x = \sum_{i=1}^n x_i$. Auf diesem Weg haben Sie eine binomialverteilte Zufallszahl erzeugt.

Aufgabe 2:

Nun generieren wir exponentialverteilte Zufallszahlen:

- a) Erzeugen Sie wieder wie in Aufgabe 1a eine auf dem Intervall $(0;1)$ gleichverteilte Zufallszahl u .
- b) Setzen Sie die erhaltene Zahl u in die Funktion $F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)$ ein, wobei $\lambda = 0,5$ sei.

Als Ergebnis erhalten wir dann 100 exponentialverteilte Zufallszahlen $y_i, i = 1, \dots, 100$.

Aufgabe 3:

Abschließend berechnen wir einen Jahresschaden S für einen homogenen Bestand von 100 Versicherten wie im Lehrmodul zum kollektiven Modell beschrieben.

- a) Modellieren Sie dazu, wie in Aufgabe 2 beschrieben, eine binomialverteilte Zufallszahl x und 100 exponentialverteilte Zufallszahlen $y_i, i = 1, \dots, 100$.
- b) Berechnen Sie nun den Jahresgesamtschaden $S = \sum_{i=1}^x y_i$.

STOCHASTISCHE SIMULATION AM BEISPIEL EINES GROSSSCHADENS

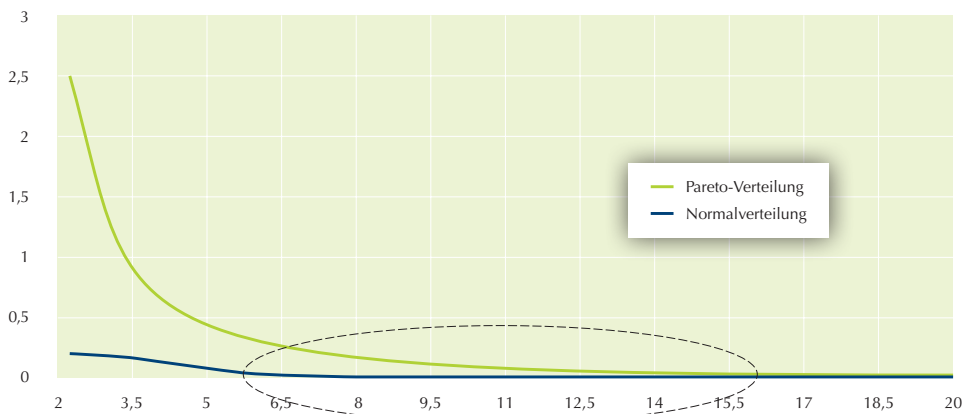
4.

Verteilungsannahmen

4.1

In Lehrmodul 1 haben wir das Beispiel eines großen Schadens von 6 Millionen € beschrieben. In den danach folgenden Lehrmodulen haben wir dann die Bedeutung der richtigen unterstellten Schadenverteilung für die Auskömmlichkeit der Prämie kennengelernt. Große Schäden treten zwar selten auf, können aber bis zu 90% des Schadenaufkommens ausmachen. Die präzise Modellierung derart großer Schäden ist deshalb von besonderer Bedeutung.

Hierfür sind besonders solche Verteilungen gut geeignet, die Ereignissen „weit draußen“ – also hohen Schäden – auch noch eine echt positive Wahrscheinlichkeit zuordnen und nicht zu schnell gegen Null gehen. Solche Verteilungen haben so genannte **schwere Flanken**. Daraus ergibt sich ein weiteres Argument gegen die Verwendung von Verteilungen, deren Dichtefunktion wie beispielsweise die Gauß'sche Glocke der Normalverteilung aussieht. Diese Verteilungen nehmen für große x zu schnell ab und unterschätzen daher große Schadenhöhen systematisch.



Auf dieser Basis können wir nun eine umgangssprachliche Definition für **Verteilungen mit schweren Flanken** ableiten: Der Graph der Dichtefunktion muss für große x oberhalb der Dichtefunktion der in Lehrmodul 3 behandelten Exponentialverteilung verlaufen. Verteilungen, für die dies nicht erfüllt ist, eignen sich eher für die Modellierung kleiner Schadenhöhen. Die Exponentialverteilung hilft uns bei folgender Definition:

Verteilung für Großschäden:

Wir nennen ein Risiko ein „gefährliches Risiko“, falls für seine Dichtefunktion folgende Ungleichung gilt:

$$f(x) \geq e^{-ax} \text{ für große } x \text{ } (x \rightarrow \infty)$$

In der Praxis wird u. a. die Pareto-Verteilung für die Modellierung von **Schadenhöhen** verwendet, wenn insbesondere auch große Schäden auftreten können. Die Dichtefunktion f zu den Parametern α , $c > 0$ lautet

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{für } x > c \\ 0 & \text{für } x \leq c \end{cases}$$

Der Erwartungswert ist dabei endlich, falls $\alpha > 1$ ist; die Varianz ist endlich für $\alpha > 2$. Die Pareto-Verteilung eignet sich somit insbesondere für Risiken mit großer Streuung und wird dort auch in der Praxis eingesetzt, z. B. in der Feuerversicherung.

Die **Schadenanzahl** hingegen haben wir bisher als binomialverteilte Zufallsgröße kennengelernt. Für genügend große n gilt nach dem **Poisson'schen Grenzwertsatz**, dass die Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung konvergiert, wobei $n \cdot p \approx \lambda > 0$. Die Dichtefunktion der Poisson-Verteilung ist

$$p_k = P(N=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Schadenanzahl Poisson-verteilt mit Parameter λ ist.



Simulation von Schadenanzahl und Schadenhöhe

4.2

In Lehrmodul 3 haben wir gesehen, wie wir die beiden Zufallsvariablen des kollektiven Modells simulieren können, wenn sie binomial- bzw. exponentialverteilt sind. Nun lernen wir Möglichkeiten für die Poisson- bzw. Pareto-Verteilung kennen.

Simulation einer Poisson-verteilten Schadenanzahl mit Parameter λ

Dazu wenden wir den folgenden Algorithmus an:

1. Wir starten bei $n := 0$ und $T := 1$.
2. Dann simulieren wir eine auf $(0;1)$ gleichverteilte Zufallsvariable mit Realisationen u und setzen $T := uT$.
3. Falls $T \geq e^{-\lambda}$, setzen wir $n := n + 1$ und gehen zurück zu Schritt 2.
4. Falls $T < e^{-\lambda}$, so ist n eine Realisierung von der Schadenanzahl N .



Simeon Denis Poisson
(1781-1840)

Simulation der Pareto-verteilten Schadenhöhen

Hierbei nutzen wir folgenden Zusammenhang:

Besitzt Z eine Pareto-Verteilung mit Parametern α und c , so ist Z verteilt wie $c U^{-1/\alpha}$, wobei U eine auf $(0;1)$ gleichverteilte Zufallsvariable ist.

Der Gesamtschaden mit einer zusammengesetzten **Poisson-Pareto-Verteilung** errechnet sich nun mittels folgendem Algorithmus:

1. Wir erzeugen wie oben zuerst eine Realisierung n der Poisson-verteilten Schadenanzahl N .
2. Danach simulieren wir n unabhängige Realisierungen $z_1, \dots, z_n$ der Regelschadenhöhe Z . Diese ist nach früheren Überlegungen genau so verteilt wie alle z_i .
3. Die Summe der Realisierungen der $z_1, \dots, z_n$ aus 2. liefert uns dann eine Realisierung des Gesamtschadens S .

Der Unterschied zur Simulation aus Lehrmodul 3 liegt also erstens darin, dass wir hier eine Verteilung mit schweren Flanken betrachten (und sich damit für den Gesamtschaden auch eine derartige Verteilung ergibt) und zweitens in der Annahme einer zusammengesetzten Poisson-Pareto-Verteilung für die Schadenanzahl.

Für Übungszwecke ist dieses Vorgehen für die Modellierung eines Gesamtschadens, bei dem auch Großschäden berücksichtigt werden, vertretbar. Da dieses Verfahren bei großen Versicherungsbeständen sehr zeitintensiv ist, wird in der Realität die zusammengesetzte Poisson-Pareto-Verteilung mit der Normalverteilung approximiert. Die Simulation wird dadurch bedeutend weniger zeitintensiv – aber um den Preis von Approximationsfehlern.

ARBEITSBLATT 3

Sie sind als Aktuarin bzw. Aktuar bei einer großen Versicherung beschäftigt, die verschiedene Versicherungsprodukte vor allem für Industrieunternehmen anbietet. Ihre Aufgabe ist die Entwicklung neuer Tarife in der Sachversicherung.

Eine Marktanalyse hat vor kurzem gezeigt, dass ein vielversprechender Markt für Feuerversicherungen für Großbetriebe existiert. Dies ist vorteilhaft, da Sie auf diesem Gebiet bereits über einige Erfahrungen hinsichtlich der Schadenanzahl N und der Einzelschadenhöhen Z_i verfügen. So wissen Sie, dass zwar durchaus hohe Schäden auftreten können, diese aber eher selten sind. Der Regelschaden Z liegt also in einem eher niedrigen Bereich.

Daher werden Sie nun gebeten, einen entsprechenden Versicherungstarif zu entwickeln. Aus Erfahrung wissen Sie, dass bei rund 100 Großbetrieben Bedarf für eine solche Versicherung besteht.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie einen möglichen Jahresgesamtschaden S nach dem im Lernmodul 4 angegebenen Algorithmus. Nutzen Sie dabei die Poisson- ($\lambda = 50$) und Pareto-Verteilung ($c = 100$, $\alpha = 10$).

Wie hoch ist der simulierte Schaden?

Tipp: Diese Aufgabe ist weitestgehend wie im zweiten Aufgabenblatt zu lösen; für die Pareto-Verteilung ist der in Lehrmodul 4 angegebene Zusammenhang zur Gleichverteilung zu nutzen.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie den Erwartungswert des Jahresgesamtschadens S . Wie nahe liegt er an Ihrem konkret berechneten Schaden?

Tipp: Nutzen Sie die Formel für den Erwartungswert des Jahresgesamtschadens in Lehrmodul 3; der Erwartungswert einer Poisson-verteilten Zufallsvariable lautet $E[N] = \lambda$; für eine Pareto-verteilte Zufallsvariable gilt:

$$E[Z] = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) \cdot c$$

Aufgabe 3:

Abschließend möchten Sie die jährliche Prämie bestimmen, die von jedem Großbetrieb zu zahlen ist. Legen Sie dazu den zu erwartenden Schaden auf alle Betriebe um und addieren jeweils einen 30%-Sicherheitsaufschlag dazu. Reichen die gesamten Prämieinnahmen aus, um den in Aufgabe 1 konkret simulierten Schaden abzudecken?



LÖSUNGSVORSCHLÄGE ZU DEN AUFGABEN Lösungen zu Arbeitsblatt 1

Aufgabe 1:

Mögliche und versicherbare Risiken sind z. B.

Krankheit (Krankenversicherung)	Autounfall (Kasko-Versicherung, Kfz-Haftpflicht)	Wohnungsbrand (Wohngebäude-, Hausrat-Versicherung)
Diebstahl des Rennrads (häufig Hausrat-Versicherung)	Unfall auf dem Weg zur Schule (Unfallversicherung)	Berufsunfähigkeit, etc.

Aufgabe 2:

Katastrophen der letzten Jahre

Ereignis	Datum	Geschätzter Gesamtschaden
Tsunami und Erdbeben, Japan	März 2011	210 Mrd. €
Flut, Australien	Dezember 2010 / Januar 2011	7,3 Mrd. €
Hurricane Katrina, North Carolina, USA	August 2005	125 Mrd. €

Quelle: Munich Re; GeoRisikoForschung

Am 26. August 2004 fiel in Folge eines Unfalls ein Tankwagen von der Autobahnbrücke „Wiehlthal“ und brannte unterhalb der Brücke vollständig aus. Durch das Feuer wurde sie so stark beschädigt, dass ein Schaden in Höhe von 30 Millionen€. entstand. Dieser Unfall gilt als einer der größten Kfz-Haftpflichtschäden der deutschen Geschichte.

Aufgabe 3:

Durch die Tatsache, dass der Erwartungswert als Bezugsgröße für die Prämie herangezogen wird, zahlen einige Versicherungsnehmer mehr, andere weniger als sie selbst benötigen. Bei zu kleiner Kollektivgröße ist entweder die Prämie inakzeptabel hoch, oder das Versicherungsunternehmen kann die aufgetretenen Schäden sehr schnell mangels Kapital nicht mehr regulieren. Andere Voraussetzungen sind: Ausgleich in der Zeit (über verschiedene Jahre hinweg), gleichartiges Risiko und gleichartige Gefährdung.

Aufgabe 4:

- Im Prinzip eine gute Idee (gemeinsame Gefährdung: kein Geld zur Verfügung; gemeinsames Interesse am Kinobesuch), aber das Kollektiv ist (zu) klein. Dadurch könnte die Kasse schnell leer sein.
- Nein. Arthur ist bereits pleite; er hat kein Geld, das er verlieren kann. Bei Martina liegt ebenfalls kein Risiko vor, da sie immer genug Geld zur Verfügung hat.
- Alle haben gleich viel Geld aus ihren Nebenjobs zur Verfügung, bilden also ein sehr homogenes sowie ein größeres (und damit gut abzuschätzendes) Kollektiv. Da die Zeit für die sich die Studierenden versichern möchten, sehr risikogeneigt ist, unterbleibt allerdings der notwendige Ausgleich in der Zeit. Daher ist das Risiko für die Xtra*Ltd. hoch, schnell mit einer leeren Kasse dazustehen. Deshalb wird sie lieber auf das Geschäft verzichten.

Lösungen zu Arbeitsblatt 2

Da dieses Aufgabenblatt im Wesentlichen mit zufälligen Zahlen gestaltet ist (die bei jedem anders lauten werden), beschränken wir uns hier darauf, den Lösungsweg anzugeben:

Aufgabe 1:

Hinweis: Die Lösung dieser Aufgaben lässt sich natürlich auch in einer einzigen Tabelle erarbeiten. Die Musterlösung als Exceldatenblatt findet sich auch im Internet unter www.lehrmaterialversicherungsmathematik.de.

	A	B	C
1	Aufgabe 1		
2	a)	b)	c)
3	gleichverteilte Zufallszahlen	Bernoulli-verteilte Zufallszahlen	binomialverteilte Zufallszahlen
4			
5	0,175732415	0	10
6	0,319989058	0	
7	0,978466233	0	
8	0,79873209	0	= SUMME (B5:B104)
9	0,092363317	1	
...			
...			
...			
100	= Zufallszahlen	= WENN (A5<0,1;1,0)	
101			
102	0,227719299	0	
103	0,181501373	0	
104	0,951120051	0	

Für die Lösung gehen wir wie im Bild links dargestellt vor. In Spalte A erzeugen wir mit der Funktion ZUFALLSZAHL() 100 gleichverteilte Zufallszahlen. Eine Spalte weiter bilden wir mit der Funktion WENN() die in 1b) geforderte Fallunterscheidung nach, die uns dann 100 Bernoulli- verteilte Zufallszahlen liefert. Die zufällige Summe in Zelle C5 ist schließlich binomialverteilt.

Aufgabe 2:

Aus jeder der gleichverteilten Zufallszahlen aus Aufgabe 1a) (z. B. 0,1757; s. Zelle A5) berechnen wir mit der Formel

$$F^{-1}(0,1757) = -\frac{1}{0,5} \ln (1 - 0,1757) = 0,3864$$

eine exponentialverteilte Zufallszahl.

Aufgabe 3:

Wieder erzeugen wir in der ersten Spalte 100 gleichverteilte Zufallszahlen. Daneben erhalten wir in der Spalte B exponentialverteilte Zufallszahlen, wenn wir wie in Aufgabe 2 vorgehen.

	A	B	C	D	E
1	Aufgabe 3				
2	a)	b)	c)		
3	gleichverteilte Zufallszahlen	exponentialverteilte Zufallszahlen	Jahresgesamt-schaden		
4					
5	0,696414705	2,384185339	23,4856755		
6	0,767685509	2,91933652			
7	0,657303272	2,141818794			
8	0,898889758	4,583087713			
9	0,12101545	0,257975223			
97			λ		
98			0,5		
99	= Zufallszahl()				
100	0,132943545	0,285302377			
101	0,410488703	1,0			
102	0,201093131	0,2			
103	0,286208478	0,67432869			
104	0,987557005	8,773194921			

= SUMME (INDIREKT („B5:B“ & (E9+4)))

n
10

= binomialverteilte Summe aus 1 c)

= -1/(\$C\$98*LN (1-A5))

In Zelle C5 können wir dann schließlich unsere gesuchte Summe S berechnen, indem wir in Spalte C eine zufällige Zahl der exponentialverteilten Zufallszahlen aus Spalte B addieren. Die Anzahl der zu addierenden Zahlen liefert uns die binomialverteilte Zufallsvariable aus Aufgabe 1c).



Lösungen zu Arbeitsblatt 3

Aufgabe 1:

Für die Simulation eines Jahresgesamtschadens gehen wir ähnlich wie in der Lösung von Aufgabenblatt 2 vor:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Aufgabe 1						
2	In dieser Spalte werden gleichverteilte Zufallszahlen für die Simulation der Pareto-verteilten Zufallsvariable Z generiert	Um die Unabhängigkeit von Z und T zu gewährleisten, werden in dieser Spalte ebenfalls gleichverteilte Zufallszahlen für die Simulation der Poisson-verteilten Zufallsvariable T generiert	Erzeugung von Pareto-verteilten Zufallszahlen mit Hilfe des Tipps aus Lehrmodul 4 (Realisierungen von Z)	Schritt 1 & 2 des Algorithmus aus Lehrmodul 4 zur Simulation der Poisson-Verteilung (Realisierungen von T werden erzeugt)	Schritt 3 & 4 des Algorithmus: Überprüfung, ob $T \exp(-\lambda)$	Ermittlung der Poisson-verteilten Zufallszahl n aus Schritt 4 des vorgestellten Algorithmus	Berechnung des Jahresgesamtschadens als zufällige Summe mit n (entspricht Wert in Zelle F4) Summanden aus Spalte C
3							
4	0,382948292	0,487206779	110,0743137	0,487206779	0	53	5915,650882
5	0,867430652	0,300596368	101,4	0,146452588	0		
6	0,84990556	0,590149774	101,6	0,086428962	0		
7	0,828194927	0,742772811	101,9029469		0		
8	0,807093043	0,904066014	102,1662939		0		
9	0,861290209	0,14038249	101,5044422	0,008147572	0		
...			...	...	...		
...			...	...	...		
...			...	...	...		
99	0,512460112	0,790033805	106,913856	6,49362E-42	1		
100	0,530309728	0,994717789	106,5484265	6,45932E-42	1		
101	0,321127361	0,181517314	112,0294668	1,17248E-42	1		
102	0,39758171	0,546067407	109,6623025	6,40253E-43	1		
103	0,759217612	0,859137173	102,7929601	5,50065E-43	1		
104							
105							
106							
107							

$\lambda = 50$
 $c = 100$
 $\alpha = 10$

Zunächst generieren wir in den Spalten A und B jeweils 100 Zufallszahlen. Dies ist notwendig, um die Unabhängigkeit der Pareto-verteilten Zufallszahlen in Spalte C und der Poisson-verteilten Zufallszahl in Zelle F4 zu gewährleisten. Anschließend werden aus den Werten in Spalte A mit Hilfe der Formel $cU^{-1/\alpha}$ die Pareto-verteilten Zufallszahlen in Spalte C erzeugt.

Gemeinsam mit den Zwischenrechnungen in Spalte D und E können wir zudem aus den Werten in Spalte B auch eine Poisson-verteilte Zufallszahl simulieren (Zelle F4). Damit lässt sich der Jahresgesamtschaden in Zelle G4 berechnen. Im vorliegenden Fall – das Ergebnis variiert abhängig von den erzeugten Zufallszahlen in Spalte A und B – ergibt sich ein simulierter Jahresgesamtschaden von rund 5915,65 €.

Aufgabe 2:

Laut Kapitel 3 gilt für den Erwartungswert des Jahresgesamtschadens:

$$\text{Aus } E[N] = \lambda = 50 \text{ und } E[Z] = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \right) \cdot c = \left(\frac{10}{9} \right) \cdot 100 = 111,11 \text{ folgt nun}$$

$$E[S] = E[N] \cdot E[Z] = 5555,55.$$

Das Versicherungsunternehmen muss somit mit einem Schaden von rund 5.556 € rechnen.

Hinweis: Die Musterlösung als Excel-Datei findet sich auch im Internet unter www.lehrmaterialversicherungsmathematik.de.



Aufgabe 3:

Unter Berücksichtigung des in Aufgabe 2 berechneten Erwartungswerts und des 30%igen Sicherheitszuschlags ergibt sich für die Prämie P pro Großbetrieb

$$P = (1+0,3) \cdot \left(\frac{1}{100} E[S] \right) = 1,3 \cdot 55,5 = 72,22 \text{ €}$$

Die Gesamtsumme der Prämieinnahmen von rund 7.222 € reicht in unserem Fall aus, um den in Aufgabe 1 simulierten Schaden zu decken. Führt man die Simulation allerdings mehrfach durch, so stellt man fest, dass dies nicht immer der Fall ist. Daher werden in Versicherungsunternehmen für diese Fälle zusätzliche Rücklagen gebildet.

MATHEMATISCHER ANHANG

Im Folgenden möchten wir die wichtigsten Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie aufführen, die für die Inhalte dieses Heftes relevant sind.

Eine **Zufallsgröße** X ist eine Abbildung, die den Ergebnisraum Ω in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ abbildet, d. h. $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto X(\omega)$

Ist die Wertemenge $X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} : x = X(\omega) \text{ für ein } \omega \in \Omega\}$ abzählbar, so sagen wir X ist eine **diskrete** Zufallsgröße, andernfalls (für den Fall $X(\Omega)$ ist überabzählbar, z. B. $X(\Omega) = \mathbb{R}$) sprechen wir von einer **stetigen** Zufallsgröße.

Für eine diskrete Zufallsgröße X lässt sich jeder reellen Zahl x die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\{\omega : X(\omega) = x\}$ zuordnen. Die entsprechende Funktionsvorschrift

$$W : x \mapsto P(X = x) := P\{\omega : X(\omega) = x\}$$

heißt **Dichtefunktion** (Wahrscheinlichkeitsfunktion) der Zufallsgröße X . Man sagt auch, die Zufallsgröße X ist nach W verteilt.

Verteilungen werden über die (kumulative) **Verteilungsfunktion** F oder (für stetige Zufallsgrößen) über ihre **Dichtefunktion** f charakterisiert. Es gilt der wichtige Zusammenhang

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

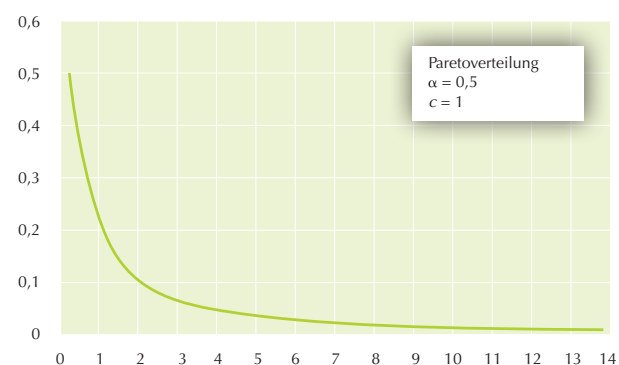
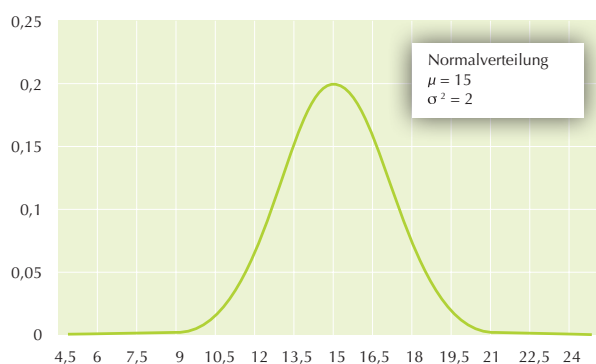
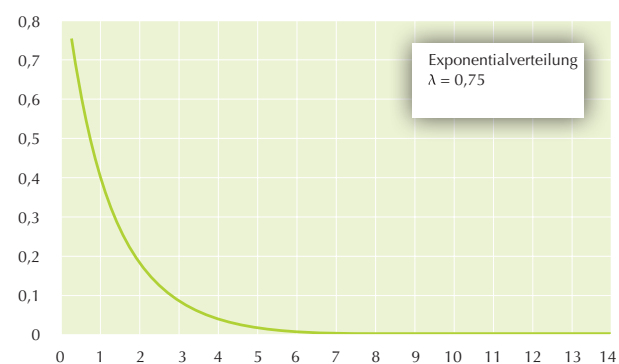
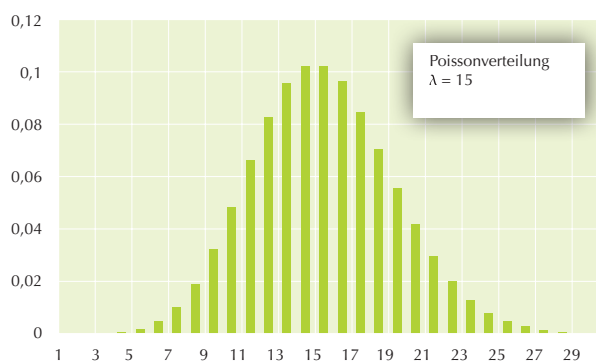
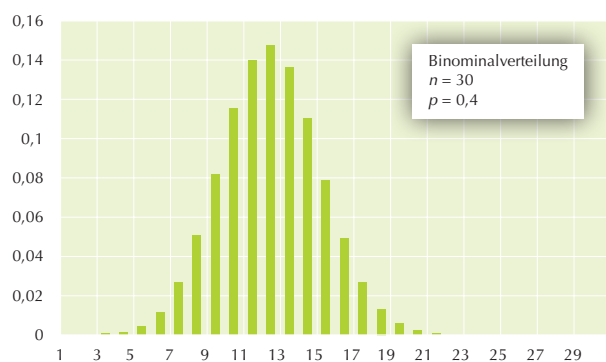
Eine Zufallsgröße besitzt verschiedene charakteristische Kennzahlen, die von ihrer Verteilung bestimmt werden. Besonders prominent sind die beiden ersten Momente, **Erwartungswert** $E(X)$ und **Varianz** $\text{Var}(X)$. Bei der Normalverteilung z. B. liefern uns die beiden Parameter direkt den Erwartungswert (gleich μ) sowie die Varianz (gleich σ^2). Erwartungswert und Varianz für eine Zufallsvariable X mit Ereignisraum Ω berechnen sich nach den folgenden Formeln, je nachdem ob die zugrunde liegende Zufallsvariable stetig oder diskret ist.

Momente	Erwartungswert	Varianz
diskret	$E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X=x)$	$\text{Var}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - E[X])^2 P(X=x)$
stetig	$E[X] = \int_{X(\Omega)} x f(x) dx$	$\text{Var}[X] = \int_{X(\Omega)} (x - E[X])^2 f(x) dx$

Auf einem intuitiven Niveau im Kontext der Zufallsexperimente kann man sich den Erwartungswert gerade als Mittelwert vorstellen, also als mittleren Wert der Zufallsgröße pro Versuch auf lange Sicht. Die Varianz (oder die Standardabweichung als Quadratwurzel aus der Varianz) gibt dann an, wie stark die Werte der Zufallsgröße um den Erwartungswert streuen.

Im Versicherungskontext sind verschiedene Verteilungen relevant, zum Beispiel:

Verteilung	Dichtefunktion	Erwartungswert	Varianz
Binomialverteilung (diskret)	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ für $X \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung (diskret)	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ für $X \in \mathbb{N}_0$	λ	λ
Normalverteilung (stetig)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ für $X \in \mathbb{R}$	μ	σ^2
Exponentialverteilung (stetig)	$\lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ 0 sonst	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Pareto-Verteilung (stetig)	$\frac{\alpha}{c} \left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha+1}$ für $x > c > 0$ 0 sonst	$\frac{\alpha c}{\alpha-1}$	$\frac{\alpha c^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$



MATHEMATIK IN VERSICHERUNGEN

*Aktuare:
Mathematische Experten
der Versicherungsbranche*

In dieser Unterrichtseinheit haben wir ein Praxisbeispiel aufgegriffen, das nicht sehr weit von den mathematischen Kalkulationen entfernt ist, die angestellt werden müssen, um Versicherungstarife zu entwickeln. Die notwendigen Berechnungen werden in den Versicherungsunternehmen von Mathematikerinnen und Mathematikern durchgeführt. In der Realität müssen darüber hinaus allerdings noch eine Reihe weiterer Aspekte beachtet werden. So erfolgt vor der eigentlichen Entwicklung eines Versicherungstarifs in der Regel eine Marktanalyse mit Hilfe statistischer Methoden, bei der ein Bedarf der potentiellen Kunden nach einem bestimmten Versicherungsschutz möglichst genau abgeschätzt wird. Bei der konkreten Berechnung des Tarifs muss dann z. B. auf Basis so genannter „angemessener versicherungsmathematischer Annahmen“ bestimmt werden, wie hoch die Monats- oder Jahresbeiträge (Prämien) sein müssen, damit ausreichende Rücklagen für die Entschädigung aller Versicherungsnehmer im Schadensfall gebildet werden können.

Es gilt das versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip:
„Erwartete Prämieinnahmen gleich erwartete Leistungsausgaben“.

Ist ein Tarif kalkuliert und an Kunden ausgegeben worden, ist die Arbeit der Mathematikerinnen und Mathematiker damit aber noch nicht getan.

So wird u. a. kontinuierlich überprüft, ob die zu Vertragsbeginn ermittelten finanziellen Rücklagen für den Leistungsfall nach wie vor ausreichend hoch sind. Diese laufende Kontrolle ist sehr wichtig, da z. B. Verträge für kapitalbildende Lebensversicherungen zum Teil über viele Jahrzehnte abgeschlossen werden.

Während der Vertragslaufzeit erhält ein Versicherungsunternehmen von seinen Kunden fortlaufend Zahlungen, die oftmals erst zu einem viel späteren Zeitpunkt wieder ausgezahlt werden. Die Überwachung der aktuellen und zukünftigen Kapitalanlagen nach Laufzeit und erreichbarer Rendite ist daher ebenfalls eine wichtige Aufgabe.

*Unter den Begriff
Erstversicherung fallen alle
Versicherungsunternehmen,
die Personen oder Unter-
nehmen mit Versicherungs-
schutz versorgen.*

(Versicherungs-)Mathematikerinnen und Mathematiker, die bei den Unternehmen die oben genannten Aufgaben bearbeiten, werden Aktuarinnen bzw. Aktuare genannt. Sie sind Experten, die speziell in den verschiedenen versicherungsmathematischen Disziplinen der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Statistik geschult wurden. Mit ihrer Expertise stellen sie sicher, dass die abgeschlossenen Versicherungsverträge auch bei sehr langen Laufzeiten von 30, 40 oder 50 Jahren, wie sie im Bereich der Altersvorsorge üblich sind, immer erfüllt werden können. Aktuare stehen somit für einen hohen Kundenschutz.

Berufsbild

Aktuare arbeiten in allen Zweigen der Versicherungsbranche. So sind sie in der Erst- und Rückversicherung, in Pensionskassen und -fonds, bei Beratungsunternehmen, der staatlichen Aufsichtsbehörde über Finanzgeschäfte und in Verbänden zu finden.

Wie bereits erwähnt, sind sie dabei mit einer Vielzahl von Aufgaben betraut. Neben der klassischen Tarifentwicklung berechnen sie die von den Unternehmen benötigten Finanzreserven, beraten die Unternehmensleitung zu sinnvollen Konzepten für die verschiedenen Versicherungsarten und bewerten diese. Zusätzlich dokumentieren sie diese Vorgänge z. B. für die Aufsichtsbehörde. Sie erarbeiten Strategien für eine sichere Kapitalanlage der Finanzmittel der Versicherungsunternehmen oder kontrollieren im Risikomanagement die verschiedenen Risiken, die sich aus der Vielfalt der abgeschlossenen Versicherungsverträge und der einzelnen Kapitalanlagen ergeben. Häufig arbeiten sie dabei interdisziplinär, d. h. die regelmäßige Kommunikation mit Juristen, Betriebswirten, Wirtschaftsprüfern und Informatikern ist ein wichtiger Bestandteil ihrer Arbeit.

Rückversicherer versichern ausschließlich Versicherungsunternehmen und decken dabei einen Teil der von den Erstversicherern übernommenen Risiken ab.

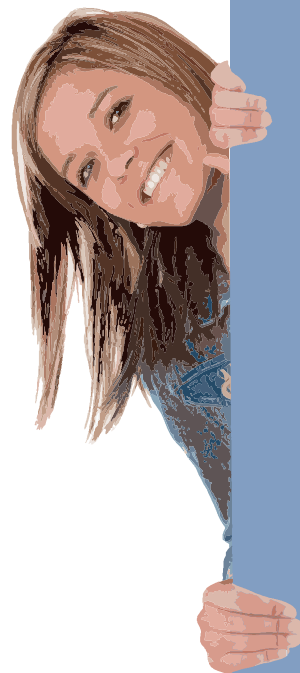
Ausbildung

Für das spätere Berufsleben als Aktuar bietet ein Studium der (Wirtschafts-)Mathematik grundsätzlich eine hervorragende Basis. Viele Hochschulen haben zudem auch Bachelor- und Masterstudiengänge eingerichtet, die einen besonderen Schwerpunkt auf die Ausbildung im Bereich Versicherungs- und Finanzmathematik legen. Dabei wird nicht nur das wichtigste wahrscheinlichkeitstheoretische und statistische Wissen vermittelt, sondern es werden auch nützliche betriebswirtschaftliche Grundlagen geschaffen. Um nach Abschluss des Studiums die für die tägliche Arbeit notwendigen Kenntnisse zu erlangen, besteht die Möglichkeit eine berufsbegleitende Ausbildung zur Aktuarin bzw. zum Aktuar zu absolvieren. Die Ausbildung dauert in der Regel drei bis vier Jahre und vermittelt ein umfassendes Wissen in der Versicherungs- und Finanzmathematik. Hinzu kommt die Vertiefung in einem Spezialfach, so dass alle weitergehenden Methoden des eigenen Tätigkeitsbereichs im Unternehmen erlernt werden.

Wie in den meisten Berufen ist natürlich auch nach der abgeschlossenen Ausbildung eine kontinuierliche Weiterbildung unerlässlich. Hierfür bietet sich eine Vielzahl von Möglichkeiten, die von Selbststudium bis zu regelmäßigen Fachtagungen reichen, bei denen zweimal im Jahr über tausend Aktuarinnen und Aktuare aus ganz Deutschland zusammenkommen.

Beruf der Zukunft

Aufgrund ihrer besonderen Fachkenntnisse werden Aktuare inzwischen nicht nur bei der Entwicklung von Versicherungsprodukten eingesetzt sondern auch in vielen weiteren Positionen innerhalb der Finanzdienstleistungsbranche. Daher sind sie gesuchte Spezialisten. Ihr Arbeitsplatz bietet viel Abwechslung, gute Aufstiegschancen und sehr gute Gehaltsaussichten. Der Beruf ist dabei längst keine Männerdomäne mehr, inzwischen beginnen mehr Frauen als Männer die aktuarielle Ausbildung.



*Aktuarin, Aktuar:
Vielseitiges Berufsbild mit
sehr guten Einstellungsmöglichkeiten und
attraktiven Gehaltsaussichten.*

Da auch Versicherungen ihre Angebote immer stärker in ganz Europa anbieten, eröffnet sich darüber hinaus die Möglichkeit einer internationalen Karriere. Durch neue, gemeinsame Finanzaufsichtsregeln entstehen weitere spannende Aufgabengebiete, die auch für Aktuare neue Herausforderungen und Chancen bieten.

Organisiert sind Aktuarinnen und Aktuare hierzulande in der Deutschen Aktuarvereinigung e.V. (DAV), die Anfang 2015 mehr als 4.400 Mitglieder hat. Ferner stehen derzeit rund 2.200 meist jüngere Finanz- und Versicherungsmathematiker im geregelten Ausbildungsgang zum Aktuar.

Wir schaffen
neues Wissen



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.



DGVFM

DEUTSCHE GESELLSCHAFT
FÜR VERSICHERUNGS-UND
FINANZMATHEMATIK e.V.