

ANALYTISCHE FORMELN FÜR DEN FEHLER DER SPÄTSCHADENRESERVE IM STOCHASTISCHEN CHAIN-LADDER-MODELL

Die **Abwicklungskoeffizienten** $IBNR_j$ und die **Volatilitätsparameter** σ_j (Volatilität: Schwankung) lassen sich erwartungstreu schätzen; für die Schätzer^G $IBNR_j$ gilt:

$$\widehat{IBNR}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i(j+1)}}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} = IBNR_j + \frac{\sigma_j}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \sum_{i=1}^{n-j} \sqrt{S_{ij}} \cdot \varepsilon_{i(j+1)} \quad j = 1, \dots, n-1$$

A.1

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} S_{ij} \left(\frac{S_{i(j+1)}}{S_{ij}} - \widehat{IBNR}_j \right)^2 \quad j = 1, \dots, n-2$$

A.2

$$\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min \left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \hat{\sigma}_{n-3}^2 \right)$$

Die Schätzer $\widehat{IBNR}_j$ sind bei gegebenem Abwicklungsdreieck **unabhängig**, und ihre Erwartungswerte erfüllen die Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} E(\widehat{IBNR}_j) &= IBNR_j \\ E(\widehat{IBNR}_j^2) &= IBNR_j^2 + \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, n-1$$

Der Fehler der Modellprognose $\hat{R}_i = \hat{S}_{in} - S_{i(n-i+1)}$ für die Spätschadenreserve $R_i = S_{in} - S_{i(n-i+1)}$ für das i-te EJ, d.h. die mittlere quadratische Abweichung SR_i^2 auf Basis des Abwicklungsdreiecks D.

$$SR_i^2 := E((\hat{R}_i - R_i)^2 | D) = E((\hat{S}_{in} - S_{in})^2 | D) \quad i = 2, \dots, n$$

lässt sich in zwei Bestandteile zerlegen, in die **Prozessvarianz** PV_i^2 und in den **Parameterschätzfehler** PE_i^2 (s.u.):

$$SR_i^2 := E((S_{in} - E(S_{in}|D))^2) + E((\hat{S}_{in} - E(S_{in}|D))^2) =: PV_i^2 + PE_i^2 \quad i = 2, \dots, n$$

A.3

Die sogenannte **Prozessvarianz** PV_i^2 gibt den kleinstmöglichen mittleren quadratischen Fehler an, den ein Schätzer annehmen kann. Optimal in diesem Sinne ist der bedingte Erwartungswert $E(S_{in} | S_{i(n-i+1)})$.

Denn eine iterative^G Anwendung der ersten Modellannahme (s. Formel (12))

$$E(S_{in}|S_{i(n-i+1)}) = S_{i(n-i+1)} \cdot IBNR_{n-1} \cdot IBNR_{n-2} \cdot \dots \cdot IBNR_{n-i+2} \cdot IBNR_{n-i+1} \quad i = 2, \dots, n$$

A.4

zeigt, dass der bedingte Erwartungswert nur vom aktuellen Schadenstand $S_{i(n-i+1)}$ und den wahren Abwicklungsfaktoren abhängt. Er unterliegt also nur den **Schwankungen des aktuellen Schadenstands**, aber keinen weiteren Fehlerquellen des Schätzverfahrens, da er die Kenntnis der wahren Abwicklungskoeffizienten voraussetzt. Die **Prozessvarianz stellt folglich ein Maß für die Schwankungen dar**, die ausschließlich auf die ungewisse Entwicklung der Schadenzahlungen zurückzuführen sind, also nicht durch die spezielle Wahl des Schätzverfahrens beeinflusst werden können. Die Wurzel aus der Prozessvarianz stellt also den **Prozessfehler (Zufallsfehler) in der Kategorisierung der Fehlerkomponenten unter 2.3.1 dar**.

Da die wahren Abwicklungskoeffizienten jedoch logischerweise unbekannt sind, enthält jedes Schätzverfahren, das in der Praxis umsetzbar ist, eine weitere Fehlerkomponente, die bei der Schätzung der Abwicklungskoeffizienten entsteht. Diese Fehlerkomponente stellt der zweite Summand dar, der sogenannte quadratische **Parameterschätzfehler** PE_i^2 ; er misst die **Abweichung des Chain-Ladder-Schätzers $\hat{S}_{in}$ vom optimalen Schätzer**.

Für das Chain-Ladder-Verfahren können folgende Darstellungen für Prozessvarianz und Parameterschätzfehler des Endschadenstands von EJ i hergeleitet werden:

Prozessvarianz

$$\begin{aligned} PV_i^2 &= Var(S_{in}|D) = E\left(\left(S_{in} - E(S_{in}|S_{i(n-i+1)})\right)^2 | S_{i(n-i+1)}\right) \\ &= \left(E(S_{in}|S_{i(n-i+1)})\right)^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j^2 / IBNR_j^2}{E(S_{ij}|S_{i(n-i+1)})} \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

A.5

quadratischer Parameterschätzfehler

$$\begin{aligned} PE_i^2 &= E\left(\left(\hat{S}_{in} - E(S_{in}|S_{i(n-i+1)})\right)^2 | S_{i(n-i+1)}\right) \\ &= S_{i(n-i+1)}^2 \cdot E\left(\left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j - \prod_{j=n-i+1}^{n-1} IBNR_j\right)^2 | S_{i(n-i+1)}\right) \\ &\approx S_{i(n-i+1)}^2 \cdot \prod_{j=n-i+1}^{n-1} IBNR_j^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j^2 / IBNR_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

A.6

Einsetzen der Schätzer $\widehat{IBNR}_j$, $\hat{\sigma}_j^2$ und $\hat{S}_{ij}$ führt auf den Schätzer für die Prozessvarianz pro EJ

$$\widehat{PV}_i^2 = \hat{S}_{in}^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \widehat{IBNR}_j^2}{\hat{S}_{ij}} \quad i = 2, \dots, n$$

A.7

und für den quadratischen Parameterschätzfehler pro EJ

$$\widehat{PE}_i^2 = S_{i(n-i+1)}^2 \cdot \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2 / \widehat{IBNR}_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \quad i = 2, \dots, n$$

A.8

SIMULATIONSMETHODEN ZUR FEHLERSCHÄTZUNG IM STOCHASTISCHEN CHAIN-LADDER-MODELL

Im Folgenden wird stets das stochastische Modell aus 2.3.2 in der speziellen Gestalt der Modellgleichung (14) aus der Broschüre betrachtet:

$$S_{i(j+1)} = S_{ij} \cdot IBNR_j + \sqrt{S_{ij}} \cdot \sigma_j \cdot \varepsilon_{i(j+1)}$$

Der Bestimmung der beiden Fehlerkomponenten der Spätschadenreserve per Simulation liegt folgende Überlegung zugrunde:

Aus den Daten des Abwicklungsdreiecks werden die Abwicklungsfaktoren geschätzt. Unterschiedliche Realisationen der Fehlergrößen ε_{ij} , $i + j \leq n + 1$, führen auf unterschiedliche Werte der Abwicklungsfaktoren und damit auf unterschiedliche Prognosen der Schadenendstände. Diese Simulation im oberen Dreieck liefert eine Einschätzung des **Parameterschätzfehlers** PE_i^2 ; die grundlegenden Schritte sind im Folgenden graphisch dargestellt:

① Ausgangsdreieck:

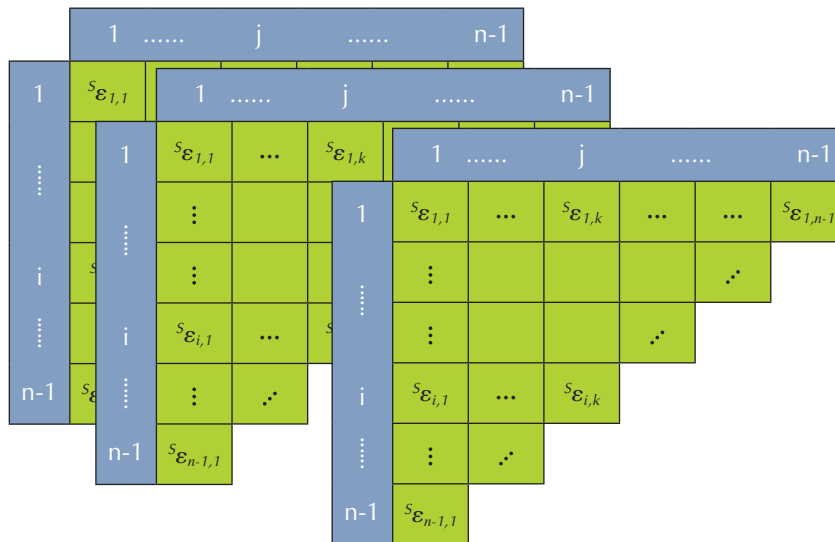
	1		j		n
1	$S_{1,1}$	...	$S_{1,j}$	...	$S_{1,n}$
...	$\vdots$				$\ddots$
i	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$		
...	$\vdots$	$\ddots$			
n	$S_{n,1}$				

② Übergangsfaktoren:

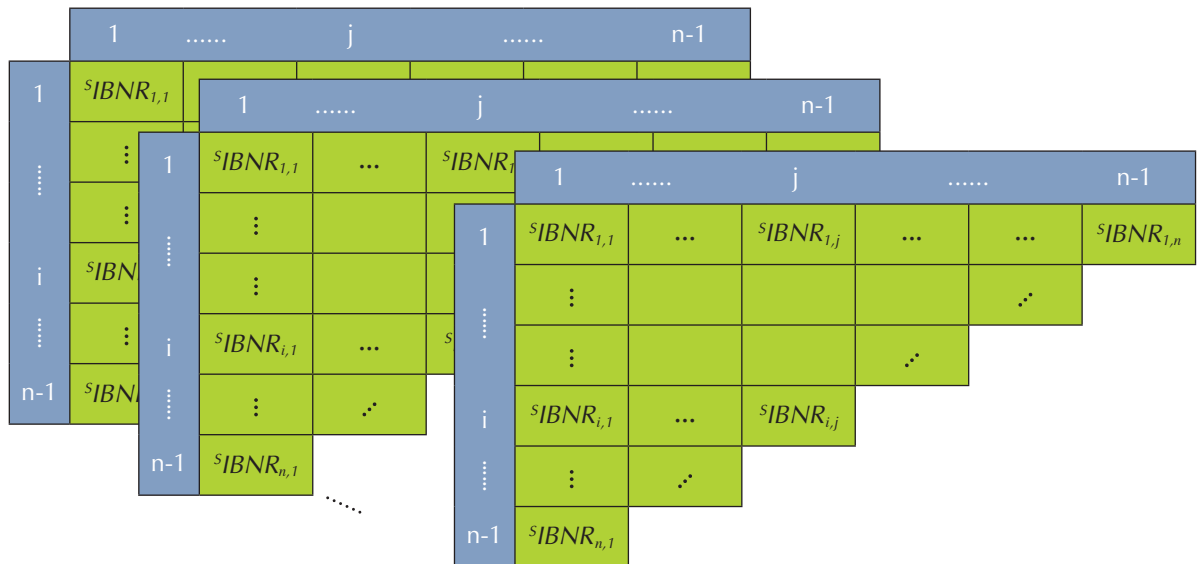
	1		j		n
1	$IBNR_{1,1}$	...	$IBNR_{1,j}$	...	$IBNR_{1,n}$
...	$\vdots$				$\ddots$
i	$IBNR_{i,1}$	...	$IBNR_{i,j}$		
...	$\vdots$	$\ddots$			
n-1	$IBNR_{n-1,1}$				

$$IBNR_{i,j} := \frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}$$

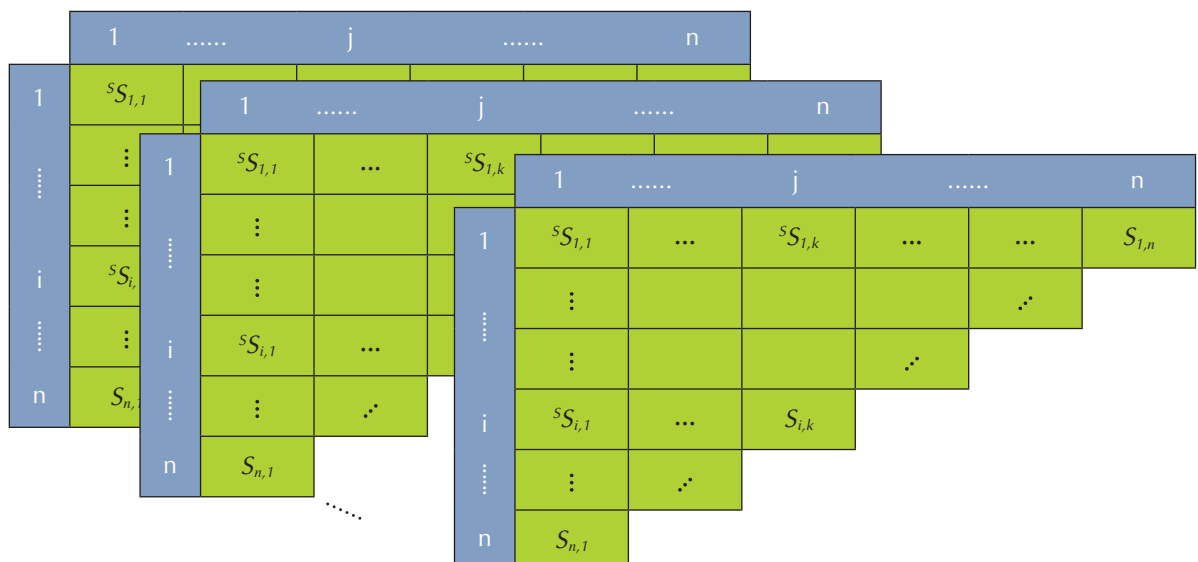
③ Simulation der Residuen:



④ Zurückrechnen auf die neuen Übergangsfaktoren:



⑤ Erzeugung der neuen Schadenstände:



Die **Prozessvarianz** PV_i^2 wird durch die Simulation der Fehlergrößen im unteren Dreieck ermittelt; denn sie ist ein Maß für die Schwankungen, die ausschließlich auf die ungewisse Entwicklung der Schadenzahlungen in der Zukunft zurückzuführen sind.

⑥ Simulation der Schadenstände im unteren Dreieck:

	1		j		n
1	$S_{1,1}$	...	$S_{1,j}$	...	$S_{1,n}$
...	$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$
i	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	${}^S S_{i,k+1}$	${}^S S_{i,n}$
...	$\vdots$	$\ddots$			$\vdots$
n	$S_{n,1}$	${}^S S_{n,2}$	...	...	${}^S S_{n,n}$

Methode A:

Die Fehlergrößen ε_{ij} werden mit Hilfe eines **Zufallsgenerators für die Standardnormalverteilung** erzeugt.

Die **Prozessvarianz** des Ereignisjahres i ist gemäß Formel (A.5) die bedingte Varianz des Endschadenstandes S_m bei gegebenem Abwicklungsdreieck. Ausgehend vom aktuellen Abwicklungsstand $S_{i(n-i+1)}$ werden unter Verwendung der Schätzer $\widehat{IBNR}_j$ und $\hat{\sigma}_j$ (vgl. Formeln (A.1) und (A.2)) mit Hilfe der Modellgleichung (14) m Werte für S_m wie folgt simuliert:

$$\begin{aligned}
 S_{i(n-i+1)}^{(l)} &:= S_{i(n-i+1)} \\
 S_{i(j+1)}^{(l)} &:= S_{ij}^{(l)} \cdot \widehat{IBNR}_j + \sqrt{S_{ij}^{(l)}} \cdot \hat{\sigma}_j \cdot \varepsilon_{ij}^{(l)}, & j = n - i + 1, \dots, n - 1, \\
 & & l = 1, \dots, m
 \end{aligned}$$

A.9

Für Ereignisjahr i werden dabei pro Simulationsschritt $i - 1$ Zufallszahlen $\varepsilon_{ij}^{(l)}$ gezogen. Die gesamte Simulation erfordert also $m \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ Zufallszahlen. Die empirische Varianz approximiert nun die Prozessvarianz der Reserve für Ereignisjahr i (vgl. Formel (A.5)):

$$PV_i^2 \approx \frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m \left(S_{in}^{(l)} - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m S_{in}^{(l)} \right)^2$$

A.10

Unter Beachtung von

$$E(\hat{S}_{in} | S_{i(n-i+1)}) = E(S_{in} | S_{i(n-i+1)}) = S_{i(n-i+1)} \cdot \prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j$$

A.11

wird aus Definition (A.6) ersichtlich, dass der **quadratische Parameterschätzfehler** die bedingte Varianz des Schätzers $\hat{S}_{in}$ für den Endschadenstand bei gegebenem Abwicklungsdreieck ist. Also gilt:

$$PE_i^2 = \text{Var}(\hat{S}_{in}|D) = \text{Var}(\hat{R}_i|D).$$

Zur Bestimmung des quadratischen Parameterschätzfehlers werden nun m Werte für den Schätzer $\hat{R}_i$ simuliert. Dazu werden zunächst auf Basis der Modellgleichung (14) m Werte für die individuellen Abwicklungskoeffizienten simuliert:

$$F_{ij}^{(l)} := \frac{S_{i(j+1)}^{(l)}}{S_{ij}^{(l)}} = \widehat{IBNR}_j + \frac{1}{\sqrt{S_{ij}}} \cdot \delta_j \cdot \varepsilon_{ij}^{(l)}, \quad j = 1, \dots, n-1, i = 1, \dots, n-j, l = 1, \dots, m$$

Dazu müssen $m \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ Zufallszahlen $\varepsilon_{ij}^{(l)}$ aus der **Standardnormalverteilung** gezogen werden. Mit den IBNR-Faktoren

$$\widehat{IBNR}_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{S_{ij}}{\sum_{l=1}^{n-j} S_{ij}} F_{ij}^{(l)}, \quad j = 1, \dots, n-1, l = 1, \dots, m$$

A.12

ergeben sich dann die Schätzer $\hat{R}_i^{(l)}$ für die Reserve:

$$\hat{R}_i^{(l)} = S_{i(n-i+1)} \cdot \left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j - 1 \right), \quad i = 2, \dots, n, l = 1, \dots, m,$$

Die empirische Varianz approximiert^G nun den quadratischen Parameterschätzfehler der Reserve für Ereignisjahr i (vgl. (A.6):

$$PE_i^2 \approx \frac{1}{m-1} \sum_{l=1}^m \left(\hat{R}_i^{(l)} - \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \hat{R}_i^{(l)} \right)^2$$

A.13

Methode B:

Anstatt mit der Normalverteilung eine einfache, aber letztlich nicht durch Daten belegte Verteilungsannahme für die Fehlergrößen (**Residuen**^G) ε_{ij} zu treffen, zielt die Methode des **Bootstrapping**^G darauf ab, eine mehr oder weniger **willkürliche Modellierungswahl zu vermeiden und stattdessen die empirische Verteilung der Daten des Schadendreiecks zu nutzen**.

Unter Verwendung der Schätzer $\widehat{IBNR}_j$ und $\hat{\sigma}_j$ bieten sich aufgrund der Modellgleichung (14) die folgenden Schätzer für die Fehlergrößen (empirische Residuen) an:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{F_{ij} - \widehat{IBNR}_j}{\frac{1}{\sqrt{s_{ij}}} \cdot \hat{\sigma}_j}, \quad i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n-i, (i, j) \neq (1, n-1)$$

Dabei wird die Kombination $(1, n-1)$ ausgeschlossen, da das zugehörige Residuum wegen $F_{1, n-1} = IBNR_{n-1}$ stets Null wäre, also keine Information enthält. Die so definierten empirischen Residuen haben Erwartungswert 0, erfüllen jedoch nicht die Modellannahme (13). Daher werden sie durch die folgenden adjustierten (angeglichenen) Größen ersetzt, die Erwartungswert 0 und Varianz 1 haben (siehe Anhang).

$$\hat{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{\varepsilon}_{ij})}} \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{s_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j} s_{ij}}}} \cdot \frac{F_{ij} - \widehat{IBNR}_j}{\frac{1}{\sqrt{s_{ij}}} \cdot \hat{\sigma}_j}$$

A.14

An die Stelle der Standardnormalverteilung tritt nun im obigen Simulationsverfahren die empirische Verteilung der Beobachtungswerte

$$\hat{\varepsilon}_{ij}, \quad i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, n-i, (i, j) \neq (1, n-1).$$

Dies bedeutet, dass an jeder Stelle des obigen Algorithmus^G, wo eine Zufallszahl aus der Standardnormalverteilung gezogen wurde, nun eine **Zufallszahl aus der empirischen Verteilung gezogen wird**. Ansonsten läuft das Simulationsverfahren völlig analog. Diese Art der Simulation nennt man übrigens **Resamplen**^G.

IBNR-Faktor

Die Schätzung für die Erwartungswerte der fehlenden Schadenbeträge erfolgt nach folgender Formel:

$$E[S_{i(j+1)}] = E[S_{ij}] \cdot IBNR_j.$$

Der IBNR-Faktor $IBNR_j$ wird aus folgender Funktion Φ hergeleitet, die minimiert werden soll:

$$\Phi(IBNR_j) = \sum_{i=1}^{n-1} (S_{i(j+1)} - IBNR_j \cdot S_{ij})^2 \longrightarrow \min.$$

Hierdurch wird erreicht, dass die Werte $S_{i(j+1)}$ von der Geraden $g(IBNR_j) = IBNR_j \cdot S_{ij}$ den geringsten Abstand im Sinne der kleinsten Fehlerquadrateschätzung haben. Durch partielle Differentiation nach $IBNR_j$ und anschließendes Nullsetzen erhält man als exakte Lösung für $IBNR_j$:

Einzel-IBNR-Faktor pro FJ:

$$IBNR_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i(j+1)} \cdot S_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}^2} \approx \frac{\sum_{i=1}^{n-j} S_{i(j+1)}}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \quad j = 1, \dots, n-1$$

$$IBNR_n := 1,0$$

(per Definition, wenn nach n Jahren vollständig reguliert ist, sonst $IBNR_n$ bis $IBNR_\infty$ schätzen, wobei $IBNR_\infty := 1,0$ ist!)

Beweise

Momente der Abwicklungskoeffizienten:

Aus der Darstellung

$$\widehat{IBNR}_j = IBNR_j + \frac{\sigma_j}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} \sqrt{S_{ij}} \cdot \varepsilon_{i(j+1)}$$

folgt $E(\widehat{IBNR}_j | D) = IBNR_j$, da die Fehlergrößen ε_{ij} und die Schadenstände S_{ij} unabhängig sind und $E(\varepsilon_{ij}) = 0$ gilt. Aus der Unabhängigkeit und $E(\varepsilon_{ij})^2 = 1$ folgt ferner

$$\begin{aligned} E((\widehat{IBNR}_j)^2 | D) &= \\ &= IBNR_j^2 + 2 \cdot \frac{\sigma_j}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} \sqrt{S_{ij}} \cdot E(\varepsilon_{i(j+1)}) + \left(\frac{\sigma_j}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \right)^2 \cdot \sum_{i,l=1}^{n-j} \sqrt{S_{ij}} \cdot \sqrt{S_{il}} \cdot E(\varepsilon_{i(j+1)} \cdot \varepsilon_{l(j+1)}) \\ &= IBNR_j^2 + \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \end{aligned}$$

Prozessvarianz für den Endschatenstand eines Entwicklungsjahres:

Aus der Darstellung

$$S_{i(j+1)} = IBNR_j \cdot S_{ij} + \sigma_j \cdot \sqrt{S_{ij}} \cdot \varepsilon_{i(j+1)}$$

folgt mit der Unabhängigkeit der Fehlergrößen ε_{ij} und der Schadenstände S_{ij} :

$$\begin{aligned} \text{Var}(S_{in}|D) &= E \left((S_{in} - E(S_{in}|S_{i(n-i+1)}))^2 | S_{i(n-i+1)} \right) \\ &= E \left((IBNR_{n-1} S_{i(n-1)} + \sigma_{n-1} \sqrt{S_{i(n-1)}} \varepsilon_{in} - IBNR_{n-1} E(S_{i(n-1)}|S_{i(n-i+1)}))^2 | S_{i(n-i+1)} \right) \\ &= E(IBNR_{n-1}^2 (S_{i(n-1)} - E(S_{i(n-1)}|S_{i(n-i+1)}))^2 + \sigma_{n-1}^2 S_{i(n-1)} \varepsilon_{in}^2 + \\ &\quad + 2 IBNR_{n-1} \sigma_{n-1} (S_{i(n-1)} - E(S_{i(n-1)}|S_{i(n-i+1)})) \sqrt{S_{i(n-1)}} \varepsilon_{in} | S_{i(n-i+1)}) \\ &= IBNR_{n-1}^2 E \left((S_{i(n-1)} - E(S_{i(n-1)}|S_{i(n-i+1)}))^2 | S_{i(n-i+1)} \right) \\ &= \sigma_{n-1}^2 S_{i(n-i+1)} \prod_{m=n-i+2}^{n-2} IBNR_m E(S_{i(n-1)}|S_{i(n-i+1)}) \sigma_{n-1}^2 + IBNR_{n-1}^2 \text{Var}(S_{i(n-1)}|D) \end{aligned}$$

Iterativ^G folgt nun

$$\begin{aligned} PV_i^2 = \text{Var}(S_{in}|D) &= S_{i(n-i+1)} \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\prod_{l=j+1}^{n-1} IBNR_l^2 \right) \sigma_l^2 \prod_{m=n-i+1}^{j-1} IBNR_m \\ &= \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \left(\prod_{l=j+1}^{n-1} IBNR_l^2 \right) \sigma_j^2 E(S_{ij}|S_{i(n-i+1)}) \\ &= (E(S_{in}|S_{i(n-i+1)}))^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j^2 / IBNR_j^2}{E(S_{ij}|S_{i(n-i+1)})} \end{aligned}$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Eje ergibt sich die **gesamte Prozessvarianz** als Summe der Prozessvarianzen aller Eje.

Parameterschätzfehler für den Endschadenstand eines Ejes:

Mit Hilfe der Unabhängigkeit der Schätzer $\widehat{IBNR}_j$ bei gegebenem Abwicklungsdreieck erhält man

$$\begin{aligned} PE_i^2 &= E \left(\left(\hat{S}_{in} - E(S_{in} | S_{i(n-i+1)}) \right)^2 | S_{i(n-i+1)} \right) \\ &= S_{i(n-i+1)}^2 E \left(\left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j - \prod_{j=n-i+1}^{n-1} IBNR_j \right)^2 | S_{i(n-i+1)} \right) \\ &= S_{i(n-i+1)}^2 \text{Var} \left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j | S_{i(n-i+1)} \right) \end{aligned}$$

Einsetzen der bedingten Varianz liefert nun:

$$\begin{aligned} PE_i^2 &= \dots = S_{i(n-i+1)}^2 \left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} E(\widehat{IBNR}_j^2 | S_{i(n-i+1)}) - \prod_{j=n-i+1}^{n-1} IBNR_j^2 \right) \\ &= S_{i(n-i+1)}^2 \left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \left(IBNR_j^2 + \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}} \right) - \prod_{j=n-i+1}^{n-1} IBNR_j^2 \right) \end{aligned}$$

Mit der Linearisierung (Taylorentwicklung) $\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \approx 1 + \sum_{i=1}^n a_i$ folgt daraus

$$PE_i^2 \approx S_{i(n-i+1)}^2 \cdot \prod_{j=n-i+1}^{n-1} IBNR_j^2 \cdot \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j^2 / IBNR_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} S_{ij}}$$

Der **Parameterschätzfehler PE der Summe der Endschadenstände aller Eje** ergibt sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} PE^2 &= E \left(\left(\sum_{i=1}^n \left(\hat{S}_{in} - E(S_{in} | S_{i(n-i+1)}) \right) \right)^2 | D \right) \\ &= \sum_{i=1}^n E \left(\left(\hat{S}_{in} - E(S_{in} | S_{i(n-i+1)}) \right)^2 | D \right) + \\ &\quad + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < k \leq n} E \left(\left(\hat{S}_{in} - E(S_{in} | S_{i(n-i+1)}) \right) \left(\hat{S}_{kn} - E(S_{kn} | S_{k(n-k+1)}) \right) | D \right) \\ &= \sum_{i=1}^n PE_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} S_{i(n-i+1)} S_{k(n-k+1)} \cdot \\ &\quad \cdot E \left(\left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j - \prod_{j=n-i+1}^{n-1} IBNR_j \right) \left(\prod_{j=n-k+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j - \prod_{j=n-k+1}^{n-1} IBNR_j \right) | D \right) \\ &= \sum_{i=1}^n PE_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} S_{i(n-i+1)} S_{k(n-k+1)} \text{Cov} \left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j, \prod_{j=n-k+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j | D \right) \\ &= \sum_{i=1}^n PE_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} S_{i(n-i+1)} S_{k(n-k+1)} \prod_{l=n-k+1}^{n-i} \widehat{IBNR}_l \text{Var} \left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{IBNR}_j | S_{i(n-i+1)} \right) \end{aligned}$$

Mit der Darstellung der Varianz aus dem Beweis für ein einzelnes EJ und der analogen Linearisierung erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
 PE^2 &\approx \sum_{i=1}^n PE_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < k \leq n} S_{i(n-i+1)} \hat{S}_{k(n-i+1)} \left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} IBNR_j^2 \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j^2 / IBNR_j^2}{\sum_{l=1}^{n-j} S_{lj}} \\
 &= \sum_{i=1}^n S_{i(n-i+1)} \left(\prod_{j=n-i+1}^{n-1} IBNR_j^2 \right) \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\sigma_j^2 / IBNR_j^2}{\sum_{l=1}^{n-j} S_{lj}} (S_{i(n-i+1)} + 2\hat{S}_{k(n-i+1)})
 \end{aligned}$$

Bootstrapping:

Aus der Darstellung

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{F_{ij} - \widehat{IBNR}_j}{\frac{1}{\sqrt{S_{ij}}} \cdot \hat{\sigma}_j} = \varepsilon_{ij} - \frac{\sqrt{S_{ij}}}{\sum_{l=1}^{n-j} S_{lj}} \cdot \sum_{l=1}^{n-j} \sqrt{S_{lj}} \cdot \varepsilon_{lj}$$

folgt mit Hilfe der Unabhängigkeit der Fehlergrößen ε_{ij} und $\text{Var}(\varepsilon_{ij}) = 1$ die Varianz der empirischen Residuen:

$$\text{Var}(\tilde{\varepsilon}_{ij}) = 1 - 2 \cdot \text{Cov} \left(\varepsilon_{ij}, \frac{\sqrt{S_{ij}}}{\sum_{l=1}^{n-j} S_{lj}} \sum_{l=1}^{n-j} \sqrt{S_{lj}} \varepsilon_{lj} \right) + \frac{S_{ij}}{(\sum_{l=1}^{n-j} S_{lj})^2} \sum_{l=1}^{n-j} S_{lj} \cdot 1 = 1 - \frac{S_{ij}}{\sum_{l=1}^{n-j+1} S_{lj}}$$

a) Initialisierung und Schätzer für IBNR und σ^2

```

# Schadendreieck
n<-7
EJ1 <-c(50731650,57956588,63039537,65533438,67406318,68793020,70369390)
EJ2 <-c(46355566,53895199,58040437,60664523,62073586,63080065,0)
EJ3 <-c(47089495,54215839,58799040,61280194,63161052,0,0)
EJ4 <-c(49837890,57286432,62409564,65173624,0,0,0)
EJ5 <-c(49386528,55768638,60238014,0,0,0,0)
EJ6 <-c(46071932,52235791,0,0,0,0,0)
EJ7 <-c(47717359,0,0,0,0,0,0)
dreieck <- rbind(EJ1,EJ2,EJ3,EJ4,EJ5,EJ6,EJ7)

# Initialisierung
m<-100000 # Anzahl der Simulationen
IBNR<-rep(0,n-1)
sigma2<-rep(0,n-1)
PE2<-rep(0,n)
PEgesamt<-0
PV2<-rep(0,n)

# Schätzer für IBNR und sigma
for (j in 1:n-1)
  {IBNR[j]<- sum(dreieck[1:(n-j),j+1])/sum(dreieck[1:(n-j),j])}
for (j in 1:(n-2))
  {for (i in 1:(n-j))
    {sigma2[j]<- sigma2[j] + dreieck[i,j]*(dreieck[i,j+1]/dreieck[i,j]-IBNR[j])^2}
    sigma2[j]<-sigma2[j]/(n-j-1)}
sigma2[n-1]<-min(sigma2[n-2]^2/sigma2[n-3],sigma2[n-3])

```

b) Simulation mit standardnormalverteilten Residuen

```
# Simulation mit standardnormalverteilten Residuen
F=matrix(0,n-1,n-1)
R=matrix(0,m,n)
Rgesamt=rep(0,m)
IBNRhut=rep(1,n-1)

for (l in 1:m)
  {for (j in 1:(n-1)){F[1:(n-j),j]<-IBNR[j] + dreieck[1:(n-j),j]^0.5*sigma2[j]^0.5*rnorm(n-j)}
  for (j in 1:(n-1))
    {# simulierter Wert für den Abwicklungskoeffizienten
    IBNRhut[j]<-dreieck[1:(n-j),j]%%F[1:(n-j),j]/sum(dreieck[1:(n-j),j])}
  # simulierter Wert für die Reserve
  for (i in 2:n)
    { R[l,i]<-dreieck[i,n-i+1]*(prod(IBNRhut[(n-i+1):(n-1)])-1) }
  Rgesamt[l]<-sum(R[l,]) }

# quadratischer Parameterschätzfehler
for (i in 1:n)
  {PE2[i]<-var(R[,i])}
PEgesamt<-sd(Rgesamt)

# Simulation der Endschadenstände
for (l in 1:m)
  {for (i in 2:n)
    {R[l,i]<-dreieck[i,n-i+1]
    for (j in (n-i+1):(n-1))
      {R[l,i]<-R[l,i]*IBNR[j]+R[l,i]^0.5*sigma2[j]^0.5*rnorm(1)}
      # fakultativer Übergang auf die Reserven, der die Varianz unverändert lässt
      #R[l,i]<-R[l,i]-dreieck[i,n-i+1] } }

# Prozessvarianz
for (i in 1:n)
  {PV2[i]<-var(R[,i])}

# Ausgabe
cat(„Prozessvarianz:“,round(PV2,2),“\n“,„quadratischer Parameterschätzfehler:“, round(PE2,2),
„\n“,„Parameterschätzfehler der Gesamtreserve:“, round(PEgesamt,2))
```

c) Bootstrapping

```
# Residuen
epsilon=rep(0,n*(n-1)/2-1)
# epsilon_1,j
for (j in 1:(n-2))
{epsilon[j]<-(dreieck[1,j+1]/dreieck[1,j]-IBNR[j])*dreieck[1,j]^0.5*sigma2[j]^0.5*
(1-dreieck[1,j]/sum(dreieck[1:(n-j),j]))^-0.5}
# epsilon_i,j für i>=2
for (i in 2:(n-1))
{for (j in 1:(n-i))
{epsilon[(i-1)*n-i*(i-1)/2+j-1]<-(dreieck[i,j+1]/dreieck[i,j]-IBNR[j])*dreieck[i,j]^0.5*sigma2[j]^0.5*
(1-dreieck[i,j]/sum(dreieck[1:(n-j),j]))^-0.5}}

# Simulation mit empirischen Residuen
F=matrix(0,n-1,n-1)
R=matrix(0,m,n)
Rgesamt=rep(0,m)
IBNRhut=rep(1,n-1)

for (l in 1:m)
{for (j in 1:(n-1))
{F[1:(n-j),j]<-IBNR[j] + dreieck[1:(n-j),j]^0.5*sigma2[j]^0.5*sample(epsilon,n-j,replace=T)}
# Simulation der Abwicklungskoeffizienten
for (j in 1:(n-1))
{IBNRhut[j]<-dreieck[1:(n-j),j]%%F[1:(n-j),j]/sum(dreieck[1:(n-j),j])}
# simulierte Reserven
for (i in 2:n)
{R[l,i]<-dreieck[i,n-i+1]*(prod(IBNRhut[(n-i+1):(n-1)])-1) } }
Rgesamt[l]=sum(R[l,]) }

# quadratischer Parameterschätzfehler
for (i in 1:n)
{PE2[i]<-var(R[,i])}
PEgesamt=sd(Rgesamt)

# Simulation der Endschatenstände
for (l in 1:m)
{for (i in 2:n)
{R[l,i]<-dreieck[i,n-i+1]
for (j in (n-i+1):(n-1))
{R[l,i]<-R[l,i]*IBNR[j]+R[l,i]^0.5*sigma2[j]^0.5*sample(epsilon,1,replace=T)}
# fakultativer Übergang auf Reserven, der die Varianz unverändert lässt
#R[l,i]<-R[l,i]-dreieck[i,n-i+1] }}

# Prozessvarianz
for (i in 1:n)
{PV2[i]<-var(R[,i])}

# Ausgabe
cat(„Prozessvarianz:“,round(PV2,2),“\n“,„quadratischer Parameterschätzfehler:“, round(PE2,2)
,“\n“,„Parameterschätzfehler der Gesamtreserve:“, round(PEgesamt,2))
```

Aufgabe

8. Beschreiben Sie einen Algorithmus (eventuell ein R-Skript) zur Simulation der Gesamtreserve mit Hilfe der empirischen Residuen für das Schadendreieck aus der Kurseinheit. Bestimmen Sie Mittelwert, Standardabweichung sowie das 95%-Quantil der Gesamtreserve und erläutern Sie deren Bedeutung.

R-Skript:

```
# Schadendreieck
n<-7
EJ1 <-c(50731650,57956588,63039537,65533438,67406318,68793020,70369390)
EJ2 <-c(46355566,53895199,58040437,60664523,62073586,63080065,0)
EJ3 <-c(47089495,54215839,58799040,61280194,63161052,0,0)
EJ4 <-c(49837890,57286432,62409564,65173624,0,0,0)
EJ5 <-c(49386528,55768638,60238014,0,0,0,0)
EJ6 <-c(46071932,52235791,0,0,0,0,0)
EJ7 <-c(47717359,0,0,0,0,0,0)
dreieck <- rbind(EJ1,EJ2,EJ3,EJ4,EJ5,EJ6,EJ7)

#Initialisierung
m<-100000 # Anzahl der Simulationen
IBNR<-rep(0,n-1)
sigma2<-rep(0,n-1)
PE2<-rep(0,n)
PV2<-rep(0,n)

# Schätzer für IBNR und sigma
for (j in 1:n-1)
  {IBNR[j]<- sum(dreieck[1:(n-j),j+1])/sum(dreieck[1:(n-j),j])}
for (j in 1:(n-2))
  { for (i in 1:(n-j))
    {sigma2[j]<- sigma2[j] + dreieck[i,j]*(dreieck[i,j+1]/dreieck[i,j]-IBNR[j])^2}
    sigma2[j]<-sigma2[j]/(n-j-1)}
  sigma2[n-1]<-min(sigma2[n-2]^2/sigma2[n-3],sigma2[n-3])

# Residuen
epsilon=rep(0,n*(n-1)/2-1)
# epsilon_1,j
for (j in 1:(n-2))
  {epsilon[j]<-(dreieck[1,j+1]/dreieck[1,j]-IBNR[j])*dreieck[1,j]^0.5*sigma2[j]^0.5*
    (1-dreieck[1,j]/sum(dreieck[1:(n-j),j]))^-0.5}
# epsilon_i,j für i>=2
for (i in 2:(n-1))
  { for (j in 1:(n-i))
    {epsilon[(i-1)*n-i*(i-1)/2+j-1]<-(dreieck[i,j+1]/dreieck[i,j]-IBNR[j])*dreieck[i,j]^0.5*
      sigma2[j]^0.5*(1-dreieck[i,j]/sum(dreieck[1:(n-j),j]))^-0.5 } }

# Simulation mit empirischen Residuen
F=matrix(0,n-1,n-1)
R=matrix(0,m,n)
IBNRhut=rep(1,n-1)
```



```

# Gesamtreserve
RGesamt<-rep(0,m)

# Simulation unter Berücksichtigung von Parameter- und Prozessfehler
for (l in 1:m)
  { for (j in 1:(n-1))
    {F[1:(n-j),j]<-IBNR[j] + dreieck[1:(n-j),j]^0.5*sigma2[j]^0.5*sample(epsilon,n-j,replace=T)}
  # Simulation der Abwicklungskoeffizienten
  for (j in 1:(n-1))
    {IBNRhut[j]<-dreieck[1:(n-j),j]%%F[1:(n-j),j]/sum(dreieck[1:(n-j),j])}
  # simulierte Reserven
  for (i in 2:n)
    { R[l,i]<-dreieck[i,n-i+1]
      for (j in (n-i+1):(n-1))
        {R[l,i]<-R[l,i]*IBNRhut[j]+R[l,i]^0.5*sigma2[j]^0.5*sample(epsilon,1,replace=T)}
        # fakultativer Übergang auf Reserven, der die Varianz unverändert lässt
        R[l,i]<-R[l,i]-dreieck[i,n-i+1] }
      RGesamt[l]=sum(R[l,]) }

# Ausgabe
hist(RGesamt,xlab= paste(„Gesamtreserve“),main = paste(„Histogramm zum Gesamtfehler“))
mean(RGesamt)
sd(RGesamt)
quantile(RGesamt,0.95)

```

Eine Simulation vom Umfang 100.000 liefert folgende Ergebnisse:

- Mittelwert: 45.019.232
- Standardabweichung: 1.827.833
- 95%-Quantil: 47.993.504

Die Standardabweichung entspricht dem Gesamtfehler, der die Wurzel aus der Summe von Prozessvarianz und quadratischem Parameterschätzfehler ist. Sie ist ein Maß der Unsicherheit des Schätzwerts 45.019.232 für die Gesamtreserve für alle Ereignisjahre. Würde das Versicherungsunternehmen 47.993.504 € reservieren, so würde die Reserve mit Wahrscheinlichkeit 95% ausreichen, alle künftigen Schäden zu regulieren.

Histogramm zum Gesamtfehler

