



Versicherungsmathematik
in der Praxis – Band 3

Zinsrechnung und ihre Praxis- anwendungen.

 **DAV**
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

 **DGVFM**
Deutsche Gesellschaft für
Versicherungs- und Finanzmathematik e.V.

Lehrmodule mit Aufgaben und Lösungen
für die Sekundarstufe

Versicherungsmathematik in der Praxis –
Band 3

Zinsrechnung und ihre Praxisanwendungen

Markus Gottwald

1. Auflage

© Deutsche Gesellschaft für Versicherungs-
und Finanzmathematik e.V. (DGVFM)
Hohenstaufenring 47 - 51
50674 Köln
www.aktuar.de
info@aktuar.de
Telefon 0221/912554-0
Telefax 0221/912554-44

Markus Gottwald
Grafische Überarbeitung: Eins 64 GbR

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT	6
1. ZAHLUNGSSTRÖME	7
Der Autokauf – Teil 1	7
Rechnen mit Zahlungsströmen	10
2. DER ZINS	12
Wachstumsprozesse mit Ein- und Auszahlungen	16
Vertiefung: Nicht konstante Zahlungsströme	20
Umsetzung im Tabellenkalkulationsprogramm	21
3. DER ZINSESZINS	23
Anwendung: Festverzinsliche Wertpapiere	28
4. BEWERTUNG VON ZAHLUNGSSTRÖMEN	33
Der Autokauf – Teil 2	33
Umsetzung im Tabellenkalkulationsprogramm	36
Vertiefung: Unterjähriges Sparen, gemischte und stetige Verzinsung und die Eulersche Zahl	38
ANHANG: LÖSUNGEN DER AUFGABEN	43
Lösungen zu Kapitel 1 – Zahlungsströme	43
Lösungen zu Kapitel 2 – Der Zins	44
Lösungen zu Kapitel 3 – Der Zinseszins	47
Lösungen zu Kapitel 4 – Bewertung von Zahlungsströmen	49

VORWORT

„Die Deutschen sind finanzielle Analphabeten“ – diese Überschrift des Magazins „Der Spiegel“ aus dem Jahr 2004 und zahlreiche andere mit ähnlichem Wortlaut beschreiben die Unsicherheit, die viele Menschen im täglichen Umgang mit dem Thema Geld empfinden. Der Tausch von Geld gegen Waren oder Dienstleistungen ist heutzutage allgegenwärtig und eine Grundlage der modernen Welt. Grundsätzliche Prinzipien – mehr Geld ist besser als weniger, Geld heute ist besser als derselbe Betrag in 10 Jahren – sind uns natürlich und intuitiv klar, aber nicht jeder würde von sich behaupten, dass er bei der Bewertung von finanziellen Vorgängen jederzeit souverän und rational vorgeht.

Fragen zum Thema Geld und Finanzen sind zentral in der modernen Welt, sowohl im privaten als auch im beruflichen Lebensbereich. Für die Durchdringung des Themas und einen selbstbewussten Umgang mit Begriffen wie Rendite, Zinseszins und Barwert ist der Begriff des Zinses unabdingbar und essenziell. Diese Unterrichtseinheit versucht einen elementaren und praxisnahen Einstieg in den Themenkomplex. Sie behält dabei durchweg Bezug zur Lebenswelt von Schülerinnen und Schülern. Sie bildet eine Basis für mögliche weiterführende Themen wie Inflation und Deflation, Kapitalanlageprodukte und Investition unter Unsicherheit, Versicherung und Vorsorge sowie Fragen der Makroökonomie und Wirtschaftspolitik.

Wir sprechen mit dieser Broschüre Schüler an, die sich in der zweiten Hälfte der Mittelstufe des Gymnasiums befinden sowie in vergleichbaren Schulformen wie das berufsbildende Gymnasium und das Wirtschaftsgymnasium. Auch für Realschüler, die einen erweiterten Realschulabschluss anstreben, sollten hier einige nutzbare Inhalte vorliegen. In einigen Teilen geht die zweite Hälfte dieser Broschüre über den Normunterricht der Mittelstufe hinaus, sodass sich die Inhalte zur Vertiefung des im Unterricht Gelernten oder zur Behandlung in der Sekundarstufe II eignen.

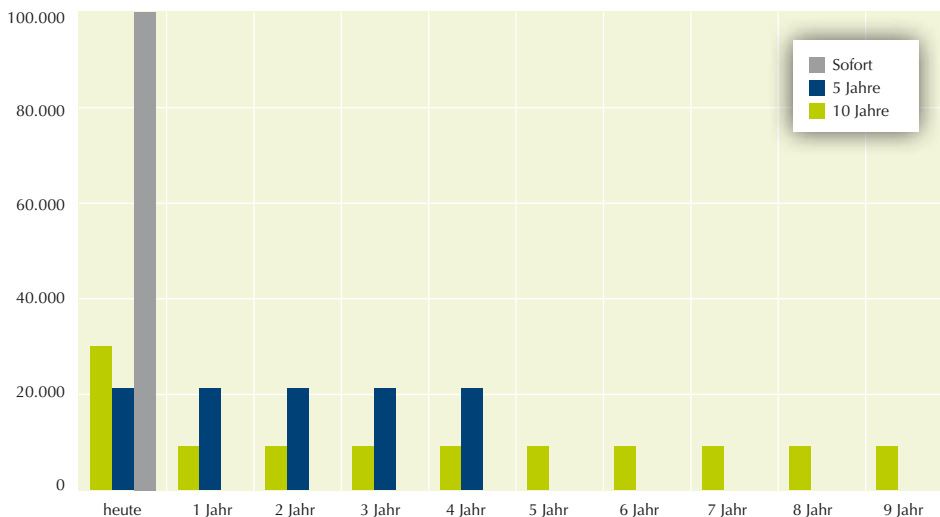
Hinweis für Lehrer zur Einbettung in das Curriculum: Diese Broschüre behandelt neben der Zinsrechnung auch lineare und exponentielle Wachstumsprozesse, Auf- und Abbauprozesse, die Abgrenzung von linearen und exponentiellen Prozessen voneinander sowie die Eulersche Zahl. Alle benötigten Vorkenntnisse sollten nach der achten Klasse vorhanden sein. Als technisches Hilfsmittel wird ein Tabellenkalkulationsprogramm (am Beispiel von Microsoft Excel) genutzt. Neben der Anwendung im regulären Unterricht bietet sich dieses Dokument auch zur Begabtenförderung oder für Facharbeiten an. Das zentrale Beispiel ist der Autokauf von Peters Vater, er zieht sich in dieser Broschüre durch mehrere Kapitel.

Der Autor bedankt sich herzlich für die umfangreiche Unterstützung von vielen Lehrern, die bei der Erstellung dieser Einheit beratend unterstützt haben, namentlich Daniela Gottwald, Martina Gottwald, Gaby Hauschildt, Sabine & Christian Hanken, Marco Lögering und Ralf Spier sowie die Mitglieder des Ausschusses Nachwuchsförderung der DGVFM und der AG Schule. Weiterhin bedankt sich der Autor bei seinen Arbeitgebern, der SCOR Global Life Deutschland und der Deutschen Rückversicherung AG/ Verband öffentlicher Versicherer, für ihre große Nachsicht bei seiner Mitwirkung im Ausschuss Nachwuchsförderung der DGVFM.

Der Autokauf – Teil 1

Lange hat es gedauert, nun ist es endlich soweit – Peters Vater kauft sich ein neues Auto! Und was für ein Auto – ein echter Traumwagen. Sportlich, gemütlich und in Peters Lieblingsfarbe Dunkelblau! Genau 100.000 € soll das Auto kosten. Natürlich darf Peter mitkommen, als sein Vater den neuen Wagen bestellt. Nachdem alle Extras – vom elektrischen Fensterheber bis zum beheizten Handbremsengriff – ausgesucht sind, kommt die Frage, wie der Wagen bezahlt werden soll. Das Autohaus schlägt drei Alternativen vor:

- Bei Übergabe des Wagens direkt den Kaufpreis bezahlen
- oder 5 Jahre lang jedes Jahr 21.199 € zahlen
- oder direkt 30.000 € und in den folgenden 9 Jahren jedes Jahr 9.116 € überweisen.



Peter wundert sich, dass sein Vater überlegt – man sieht doch sofort, dass die beiden letzten Alternativen teurer sind, oder?

Man kann sich die heutige Zeit ohne Nutzung von Geld im täglichen Leben fast nicht mehr vorstellen. Du erhältst von Deinen Eltern Taschengeld, kaufst Dir davon ein cooles T-Shirt oder Sportschuhe oder sparst es auf der Bank, Du wirst in der Schule von Lehrern unterrichtet, die dafür ein Gehalt bekommen, für den Blockflötenunterricht in der Musikschule oder das Fußballtraining zahlen Deine Eltern jeden Monat Beiträge. Ständig ist man von einem Tausch von Geld gegen Waren – zum Beispiel die Sportschuhe – oder gegen Dienstleistungen – zum Beispiel das Fußballtraining – umgeben.



Gut zu wissen: Historisch betrachtet ist die Erfindung des Geldes eine der wichtigsten Grundlagen jeder Hochkultur. Die Einführung von Geld schafft die Möglichkeit, dass sich jeder in seinem Beruf auf einige wenige Tätigkeiten konzentrieren kann: Der Bäcker backt Brötchen und Brot, der Lehrer unterrichtet und der Staat sorgt für den Straßenbau. Ohne Geld müsste der Bäcker einen Lehrer suchen, der gerade Brötchen oder Brot benötigt, und diese dann gegen Unterricht eintauschen. Eine solche reine Tauschwirtschaft ist sehr aufwändig und unproduktiv. In einer Geldwirtschaft hat das Geld hierbei drei Funktionen, es dient als Recheneinheit für den Wert einer Ware oder einer Dienstleistung (Wertmessfunktion), als Zahlungsmittel (Zahlungsmittelfunktion) und als Möglichkeit, einen Wert „aufzubewahren“ und an einem anderen Ort und zu einer anderen Zeit einzulösen (Wertaufbewahrungsfunktion). Umgekehrt kann man auch sagen, dass alles, was diese genannten drei Funktionen erfüllt, als Geld fungiert. Ein Beispiel ist die Zigarettenwährung in Deutschland nach dem zweiten Weltkrieg.

Natürlich kann man die Mathematik dafür verwenden, ein „besseres Gefühl“ dafür zu bekommen, was bei solchen Zahlungen eigentlich passiert. Dafür führen wir einen wichtigen Begriff ein.

Definition Zahlungsstrom: Ein Zahlungsstrom ist eine Folge von Zahlungen, die zu festgelegten Zeitpunkten zwischen zwei Parteien stattfindet. Das Vorzeichen legt dabei die Richtung des Geldflusses zwischen den Parteien fest – dies ist vor allem dann relevant, wenn Zahlungen in beide Richtungen fließen.

Insbesondere ist auch eine einzelne Zahlung schon ein Zahlungsstrom, aber dieser Fall ist in der Regel langweilig.

Übrigens: Im Englischen heißt ein Zahlungsstrom „cash flow“ – heutzutage wird dieser Begriff manchmal auch im Deutschen verwendet.

Im Beispiel des Autokaufs von Peters Vater stehen also drei unterschiedliche Zahlungsströme zur Auswahl:

	Heute	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	6 Jahre	7 Jahre	8 Jahre	9 Jahre
Vorschlag 1	100.000 €									
Vorschlag 2	21.199 €	21.199 €	21.199 €	21.199 €	21.199 €					
Vorschlag 3	30.000 €	9.116 €	9.116 €	9.116 €	9.116 €	9.116 €	9.116 €	9.116 €	9.116 €	9.116 €

Zur Vereinfachung schreibt man die Zahlungsströme meistens in Klammern, die einzelnen Zahlungen sind durch Semikolons getrennt. Wichtig ist, dass dabei immer klar festgehalten wird, in welchen Zeitabständen die Zahlungen stattfinden.

Vorschlag 1: (100.000) heute

Vorschlag 2: (21.199; 21.199; 21.199; 21.199; 21.199) bei jährlicher Zahlung zum 1. Januar

Vorschlag 3: (30.000; 9.116; 9.116; 9.116; 9.116; 9.116; 9.116; 9.116; 9.116; 9.116), jährliche Zahlung zum 1. Januar

Die Zahlungen müssen nicht alle dieselbe Höhe haben. Beispielsweise kann ich mir von einem Freund 10 € leihen und sie in den kommenden Tagen zurückzahlen.

	Heute	Morgen	Übermorgen
Zahlungsstrom	10	-2	-8

Der Zahlungsstrom kann dann wie folgt geschrieben werden: (10; -2; -8) bei täglicher Zahlung.

Hier sieht man auch, dass Zahlungen in beide Richtungen gehen können. Zur Unterscheidung verwendet man für Zahlungen in eine der Richtungen ein negatives Vorzeichen. In dem Beispiel vom Autokauf kann man die Zahlungen alle mit einem negativen Vorzeichen versehen, wenn man klarstellen möchte, dass sie aus Sicht von Peters Vater notiert sind und jeweils eine Ausgabe darstellen.

Außerdem müssen die zeitlichen Abstände zwischen den Zahlungen nicht unbedingt immer gleich groß sein. Man kann sich dann vorstellen, dass in den anderen Zeitpunkten eine Zahlung der Höhe Null stattfindet. Beispielsweise kann ich mir von einem Freund heute 10 € leihen, morgen 2 € und in vier Tagen die restlichen 8 € zurückzahlen.

	Heute	Morgen	In vier Tagen
Zahlungsstrom	10	-2	-8

Der Zahlungsstrom hat dann folgende Form: (10; -2; 0; 0; -8) bei täglicher Zahlung. Man sieht an diesen Beispielen, dass es bei einem Zahlungsstrom immer um drei Aspekte geht:

- Wie hoch sind die Zahlungen,
- In welche Richtung fließen die einzelnen Zahlungen und
- Wann finden die einzelnen Zahlungen statt.

Sehr viele Vorgänge im täglichen Leben – aber auch in vielen Unternehmen – lassen sich nun mit Zahlungsströmen beschreiben.

Aufgabe 1:

Stelle folgende Situationen auf beide Arten (tabellarisch und in Klammerschreibweise) dar:

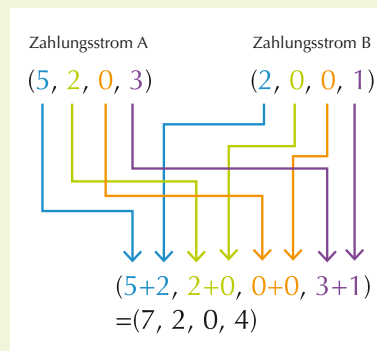
- Du leihst Deinem Freund 5 €, er zahlt sie Dir in den kommenden fünf Tagen in gleichen Raten zurück.
- Du sparst in Deiner Spardose ein Jahr lang jeden Monatsanfang 5 €, am Jahresende leerst Du sie.
- Du kaufst Dir heute eine Playstation für 299 €.

Rechnen mit Zahlungsströmen

Zahlungsströme sind nicht nur eine Möglichkeit, eine Folge von Zahlungen darzustellen, sie haben auch die schöne Eigenschaft, dass man mit ihnen rechnen kann. Beispielsweise kann man die Summe aus zwei Zahlungsströmen bilden oder man multipliziert einen Zahlungsstrom mit einem Faktor (und erhält in beiden Fällen wieder einen Zahlungsstrom).

Addition von zwei Zahlungsströmen:

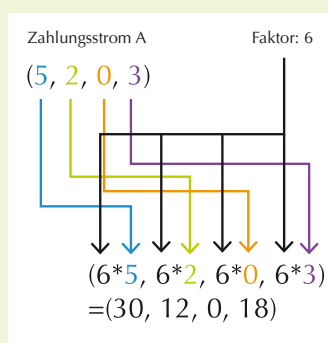
Beispiel: Helena kriegt von ihren Großeltern zwischendurch eine kleine Taschengeldaufbesserung. Oma Iris gibt ihr in der ersten Woche 5 €, in der zweiten Woche 2 € und in der vierten Woche 3 €. Von Opa Ralf erhält sie in der ersten Woche 2 € und in der vierten Woche 1 €. Wie sieht ihre gesamte Taschengeldaufbesserung aus?



Bei der Addition von zwei (oder mehr) Zahlungsströmen werden die einzelnen Zahlungen zueinander addiert. Dabei ist es wichtig, dass man darauf achtet, dass man nur Zahlungen miteinander verrechnet, die gleichzeitig stattfinden – gegebenenfalls, indem man den einen Zahlungsstrom mit Nullen auffüllt.

Multiplikation mit einem Faktor:

Beispiel: Helena hat mit ihrer Oma Iris vereinbart, dass sie für eine Top-Note in Mathematik sage und schreibe das Sechsfache einer Taschengeldaufbesserung erhält. Lohnt es sich, dafür zu lernen? Wenn man einen Zahlungsstrom mit einer Zahl multipliziert, dann wird jede einzelne Zahlung dieses Zahlungsstromes mit der Zahl multipliziert.



Beispiele:

- a) Angenommen, Peters Vater entscheidet sich für den zweiten Finanzierungsvorschlag. Gleichzeitig kauft er noch eine neue Küche. Diese kostet 9.900 € und ist in genau einem Jahr zu bezahlen.
- b) Peters Vater hat im Lotto gewonnen und kauft dasselbe Auto auch seinen beiden Nachbarn (zweiter Finanzierungsvorschlag).
- c) Johannes nimmt zwei Kredite auf. Beim ersten erhält er heute 1.000 € und muss dafür in den kommenden 5 Monaten jeweils 205 € zurückzahlen. Beim zweiten erhält er heute 3.000 € und muss in zwei und in 4 Monaten jeweils 1.550 € zurückzahlen.

Aufgabe 2:

Bestimme die Zahlungsströme in diesen drei Beispielen.

Eine interessante Frage ist nun, wie man verschiedene Zahlungsströme vergleicht. Beispielsweise möchte Peter immer noch wissen, welche Alternative für seinen Vater die günstigste ist. Hierzu müssen wir uns überlegen, wie man einen Zahlungsstrom bewerten kann, diese Bewertungen von den einzelnen Zahlungsströmen kann man dann direkt miteinander vergleichen. Hierzu benötigen wir den Begriff des Zinses, den wir im folgenden Kapitel einführen.

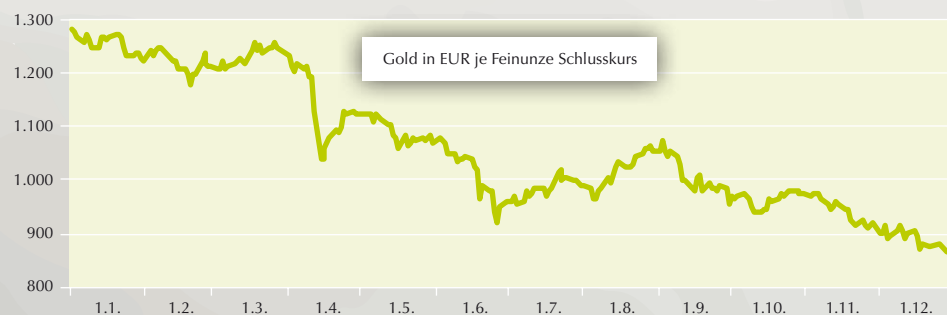
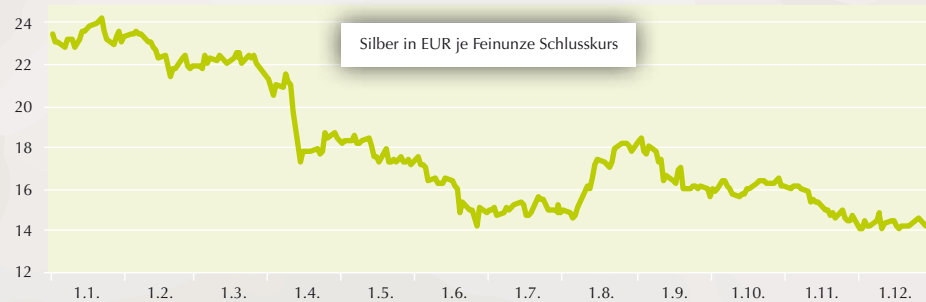


Gut zu wissen: Es gibt einen Bereich der Mathematik – die Finanzmathematik –, die sich unter anderem mit der Bewertung von Zahlungsströmen beschäftigt. Dies ist eine Tätigkeit, der viele Mathematiker in Banken und Versicherungen nachgehen. Die Herausforderung in vielen Fällen ist dabei noch zusätzlich, dass die Zahlungen nicht sicher sind, sondern gewissen Unsicherheiten (man spricht dann von Wahrscheinlichkeiten) unterliegen. Ein Beispiel hierfür sind Aktienkurse, deren zukünftige Entwicklung nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann. Hierfür werden dann mathematische Modelle, sogenannte stochastische Modelle, entwickelt, in denen die untersuchten Fragen beantwortet werden können.

2. DER ZINS

Zeitungsartikel: Das Börsenjahr 2013 im Rückblick

Frankfurt. Das Börsenjahr 2013 hat alle Experten überrascht. Im Schatten der Eurokrise bewegten sich die Kurse an den Aktien- und Rohstoffmärkten so stark, wie es kein Experte erwartet hat. Allerdings verliefen die Entwicklungen nicht immer zu Gunsten der Investoren. Während auf der einen Seite die Aktienmärkte zulegten, verloren die als konservatives Investment beliebten Edelmetalle an Wert. So gewann der Dax 24,8% im Jahr 2013, während der Goldpreis 28,9%, der Silberpreis sogar 35,7% verlor.



Gut zu wissen: Das Prozentzeichen ist eine abkürzende Schreibweise für Hundertstel. Der Name kommt aus dem Italienischen von *per cento* (von hundert). Mathematisch bedeutet es, dass die Zahl vor dem Prozentzeichen durch 100 geteilt werden muss, also:

$$3\% = \frac{3}{100} = 0,03$$

Manchmal hört man auch den Ausdruck Promille (ital.: *per mille*). Das Zeichen hierfür ist ‰. Dies bedeutet, dass die Zahl vor dem Promillezeichen durch 1000 geteilt wird.

Die Größen, mit denen man in der Finanzwelt, aber auch „im normalen Leben“ umgeht, sind geprägt von Zunahmen und Abnahmen. Die Preise im Supermarkt ändern sich, das Gesparte auf dem Konto „vermehrt“ sich und für die Finanzierung des neuen Autos sind Kreditzinsen fällig. Man unterscheidet hierbei zwischen zwei Arten, ein solches Wachstum zu beschreiben.

1. Absolute Änderungen: Viktor kriegt jede Woche von seinen Eltern Taschengeld. Er hat mit seinen Eltern vereinbart, dass er ab dem ersten Schuljahr jedes Jahr eine Taschengelderhöhung von 1 € erhält. Er kriegt also im ersten Schuljahr 1 €, im zweiten Schuljahr 2 €, im dritten Schuljahr 3 € u.s.w.

2. Relative oder prozentuale Änderung: Viktoria erhält ebenfalls von ihren Eltern jede Woche ein Taschengeld. Sie hat allerdings eine Erhöhung um 50% des Taschengeldes in jedem Jahr vereinbart. Sie kriegt somit im ersten Schuljahr 1 €, im zweiten 1,50 €, im dritten Schuljahr 2,25 € u.s.w.

Aufgabe 1:

Berechne die Werte für Viktors und Viktorias Taschengeld in der Tabelle für die kommenden Jahre (runde dabei auf zwei Nachkommastellen).

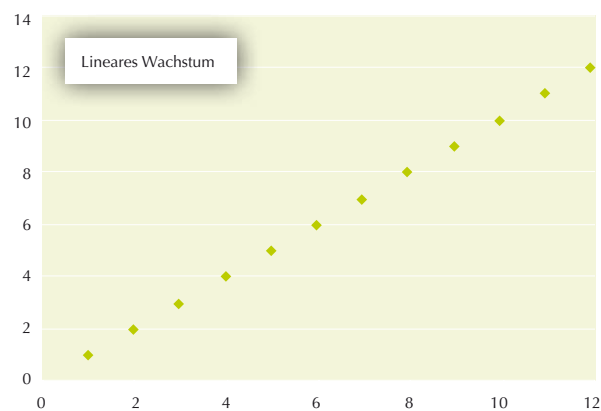
Schuljahr	Viktor	Viktoria
1	1,00 €	1,00 €
2	2,00 €	1,50 €
3	3,00 €	2,25 €
4		
5		
6		
7		

Schuljahr	Viktor	Viktoria
8		
9		
10		
11		
12		
Ggf. 13		

(Erinnerung: Taschengeldzahlungen sind Zahlungsströme!)
Beurteile, wer von beiden geschickter verhandelt hat.

Mathematisch kann man solche Wachstumsprozesse iterativ in einer sogenannten **Differenzengleichung** (auch **Rekursive Darstellung** genannt) beschreiben. Dabei drückt man den neuen Wert als Funktion des vorherigen Wertes aus. In unserem Beispiel bestimmt sich das Taschengeld in jedem Schuljahr abhängig von dem Wert im Schuljahr davor.

Bei der **absoluten Änderung** (wie im Fall von Viktor) entspricht das Taschengeld im dritten Jahr dem Taschengeld im zweiten Jahr plus 1 €, also $T(3) = T(2) + 1$. Wenn die Änderung in jedem Zeitschritt eine konstante Zahl ist, dann nennt man die Folge der $T(n)$ eine arithmetische Folge und man spricht von **linearem Wachstum**.



Die Differenzengleichung bei linearem Wachstum lautet:

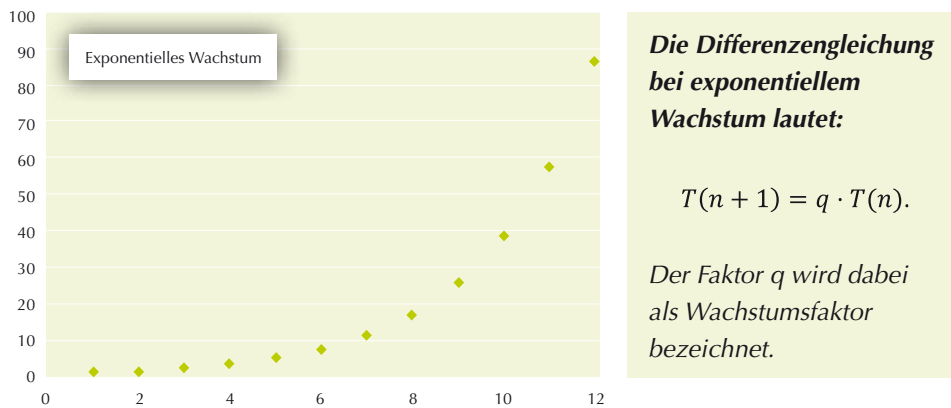
$$T(n+1) = T(n) + d$$

Wenn man im Fall eines linearen Wachstums zwei aufeinanderfolgende Werte hat, lässt sich die Erhöhung d als Differenz dieser Werte bestimmen:

$$d = T(n+1) - T(n).$$



Bei der **relativen Änderung** (wie im Fall von Viktoria) beträgt das Taschengeld im dritten Jahr das 1,5-fache des Taschengeldes im Vorjahr, also $T(3) = (1 + 50\%) \cdot T(2) = 1,5 \cdot T(2)$. Wenn dieser Wachstumsfaktor in jedem Jahr derselbe ist, spricht man auch von einer geometrischen Folge und vom **exponentiellen Wachstum**.



Bei den Beispielen, die wir hier betrachten, handelt es sich in der Regel um Verzinsungsprozesse. Bei einer prozentualen Erhöhung eines Kapitals um p % setzt man dabei $q = 1 + p\% = 1 + \frac{p}{100}$. Bei einer 10%-Erhöhung beträgt der Wert von q somit $q = 1 + 10\% = 1,1$. Hierbei wird q auch als Aufzinsungsfaktor und p als Zinsfuß (oder einfach als Zins) bezeichnet.

Wenn man bei einem exponentiellen Wachstum zwei aufeinanderfolgende Werte besitzt, bestimmt man die relative oder prozentuale Erhöhung p durch

$$T(n+1) = (1+p) \cdot T(n)$$

$$T(n+1) = T(n) + p \cdot T(n)$$

$$p = \frac{T(n+1) - T(n)}{T(n)}$$

Man kann diese Formeln benutzen, um aus den Werten eines Kontos in zwei Zeitpunkten die Verzinsung zwischen diesen Zeitpunkten zu bestimmen.

Beispiel: Danielas Bankkonto hat am 1. Januar 2016 den Wert 5.370,00 € und am 1. Januar 2017 den Wert 5.617,02 €. Daniela hat weder Geld eingezahlt noch hat sie etwas abgehoben, das Konto ist gebührenfrei. Welchen Zinssatz hat ihr die Bank gezahlt?

Lösung: Der Zinssatz entspricht der relativen Änderung des Betrages auf dem Bankkonto:

$$\frac{5.617,02 - 5.370,00}{5.370,00} = \frac{247,02}{5.370,00} = 0,046 = 4,6\%$$

Aufgabe 2:

Stelle die Werte aus der untenstehenden Tabelle in einem Diagramm graphisch dar und stelle jeweils die Differenzengleichung auf. Entscheide und begründe anhand der Differenzengleichung, ob es sich dabei jeweils um ein lineares oder ein exponentielles Wachstum handelt.

Zeitpunkt	Zahlungsstrom A	Zahlungsstrom B	Zahlungsstrom C	Zahlungsstrom D
1	4,00	1,00	10	10
2	4,50	1,30	20	20
3	5,00	1,69	40	30
4	5,50	2,20	80	40
5	6,00	2,86	160	50
6	6,50	3,71	320	60
7	7,00	4,83	640	70
8	7,50	6,27	1280	80

Wachstumsprozesse mit Ein- und Auszahlungen

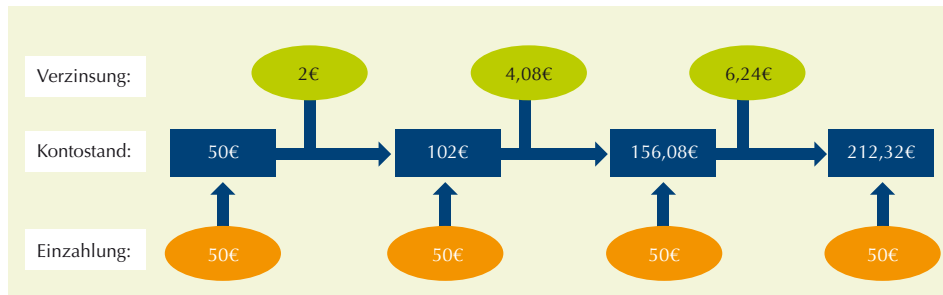
Eine allgemeinere Form einer Differenzengleichung sieht so aus:

$$K(n+1) = q \cdot K(n) + R$$

Dabei ist $K(n)$ das vorhandene Kapital zum Zeitpunkt n , q die relative Änderung des Kapitals während des Zeitraums und R die absolute Änderung am Ende jedes Zeitraums. Man kann dabei $K(n)$ als Kontostand und R als Ein- beziehungsweise Auszahlung interpretieren. Diese Ein- beziehungsweise Auszahlungen sind der dazugehörige Zahlungsstrom.

In dieser Darstellung wird angenommen, dass die Zahlung R zum Ende des Zeitraums stattfindet. Dies bedeutet, dass die Zahlung R nicht der relativen Änderung q im jeweiligen Zeitraum unterliegt. Man spricht in diesem Fall von **nachschüssiger** Zahlung. Für den Fall, dass die Zahlung zu Beginn des Zeitraums geschieht, spricht man von **vorschüssiger** Zahlung. Du findest hierzu später eine Aufgabe.

Beispiel: In den letzten vier Jahren erhielt Erik von seinem Onkel Christian als Weihnachtsgeschenk jeweils 50 €. Er legt dieses Geld auf seinem Konto zu 4% an.



Der Zahlungsstrom in diesem Beispiel ist (50; 50; 50; 50) mit jährlichen Zahlungen zum 24. Dezember. Die Zinsen entstehen dadurch, dass das Geld für die Dauer zwischen den Zeitpunkten auf dem Konto liegt – mit anderen Worten:

Wenn Du zwei Werte eines Zahlungsstroms miteinander addieren oder voneinander subtrahieren möchtest, musst Du zunächst den einen Wert auf den Zeitpunkt des anderen Wertes verzinsen. Erst danach kannst Du die beiden Werte addieren oder subtrahieren.

In unserem Beispiel werden die 50 € des ersten Weihnachtsfestes für ein Jahr verzinst und können erst dann mit den 50 € des zweiten Jahres zusammengefasst werden u.s.w.

Achtung: Eine reine Summierung der Werte eines Zahlungsstroms ist nur dann sinnvoll, wenn man einen Zins von 0% annimmt. In unserem Beispiel bedeutet das, dass Erik das Geld nicht auf seinem Konto einahlt, sondern unverzinst aufbewahrt (zum Beispiel unter seinem Kopfkissen).

Eine Situation wie in dem Beispiel sieht man in der Finanzmathematik häufig: zu einem gegebenen Zins und einem gegebenen Zahlungsstrom ermittelt man den Wert, den der Zahlungsstrom am Ende generiert. Diesen Wert nennt man **Endwert** des Zahlungsstroms. Im Fall von Erik sind die 212,32 €, die er am Ende auf dem Konto hat, der Endwert des Zahlungsstroms.



Aufgabe 3:

Außerdem erhält Erik von seiner Oma in jedem der vier Jahre zusätzlich 20 €. Diese legt er auf einem anderen Konto zu 5% an. Beschreibe den Zahlungsstrom in Klammerschreibweise und berechne den Endwert.

Aufgabe 4:

Angenommen, Onkel Christian hatte auf seinem Konto vor dem ersten Geschenk 800 €. Berechne, welcher Betrag nach dem vierten Weihnachtsfest übrig ist, wenn dieses Konto auch mit 4% pro Jahr verzinst wird und er ansonsten nicht auf das Konto zugreift?

Wir sehen in diesem Beispiel, dass die Zinszahlungen eines Jahres in den Folgejahren selber wieder Zinsen tragen. Diesen Effekt schauen wir uns im nächsten Kapitel genauer an.

Bei diesem Vorgehen gehen wir gedanklich vom heutigen Zeitpunkt in die Zukunft: Wir haben ein Kapital, verzinsen dies um ein Jahr und erhöhen (oder verringern) es um einen Betrag, um am Ende den Endwert zu erhalten. Wir können aber auch umgekehrt vorgehen: angefangen bei der letzten Zahlung gehen wir gedanklich rückwärts in der Zeit und berücksichtigen dabei in jedem Schritt die Zahlungen R und den Zins.

Beispiel: Welchen Betrag muss Onkel Christian zu Beginn mindestens auf dem Konto haben, um Erik seine Geschenke zu machen?

Lösung: Der Zahlungsstrom lautet $(-50; -50; -50; -50)$ mit jährlicher Zahlung, das negative Vorzeichen bedeutet, dass hier eine Auszahlung vorliegt.

Wir stellen dafür die Differenzengleichung um:

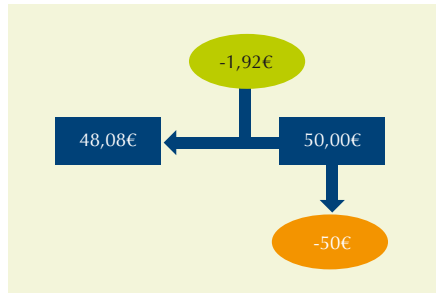
$$K(n) = \frac{K(n+1) - R}{q}$$

Dabei ist $K(n)$ das Kapital auf dem Konto von Onkel Christian nach der Abhebung und wir berechnen mit $K(4) = 0$ (d. h. nach dem vierten Weihnachtsgeschenk ist das Konto leer) den notwendigen Betrag:

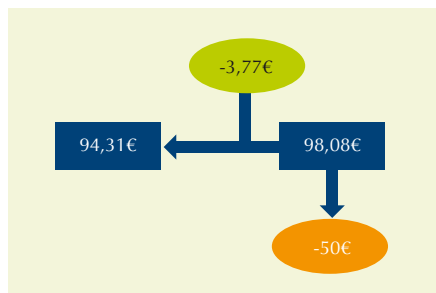
Jahr	Kapital $K(n)$ zum 24.12. in €
4	0
3	$\frac{0 - (-50)}{1,04} = 48,08$
2	$\frac{48,08 - (-50)}{1,04} = 94,31$
1	$\frac{94,31 - (-50)}{1,04} = 138,76$



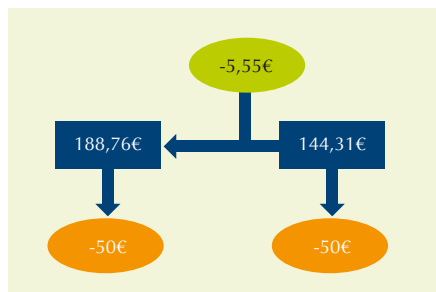
Diese Werte werden wie folgt interpretiert: Onkel Christian braucht im dritten Jahr auf seinem Konto noch 48,08 €, damit er im vierten Jahr inklusive Zins genau die 50 € für das Weihnachtsgeschenk auf dem Konto hat. Der Zins ist negativ, da wir in der Zeit zurückgehen, man spricht in diesem Fall auch von **abzinsen** oder **diskontieren**.



Im zweiten Jahr braucht er genau 94,31 €, um nach einem Jahr 50 € für das Geschenk und die 48,08 € auf dem Konto zu haben (zusammen 98,08 €). Mit anderen Worten: Wenn er genau 94,31 € auf dem Konto hat, verdient er in dem Jahr einen Zins von 3,77 € darauf.



Im ersten Jahr benötigt er 138,76 € auf dem Konto, um im kommenden Jahr die 50 € Geschenk und die 94,31 € Kontosaldo zur Verfügung zu haben. Mit dem Geschenk im ersten Jahr in Höhe von 50 € benötigt Onkel Christian also ein Startkapital von 188,76 €. Dieses Startkapital nennt man den Barwert des Zahlungsstroms.



Aufgabe 5:

- Beschreibe den Zahlungsstrom in Klammerschreibweise, wenn das Weihnachtsgeschenk von Onkel Christian in jedem Jahr genau 100 € beträgt. Bestimme den Barwert und den Endwert des Zahlungsstroms sowohl aus Sicht von Erik als auch aus Sicht von Onkel Christian (der Zins beträgt unverändert 4%).
- Berechne, wie groß die Bar- und die Endwerte (unter demselben Zins) wären, wenn Onkel Christian 6 Jahre lang in jedem Jahr 50 € schenken würde.

Vertiefung: Nicht konstante Zahlungsströme

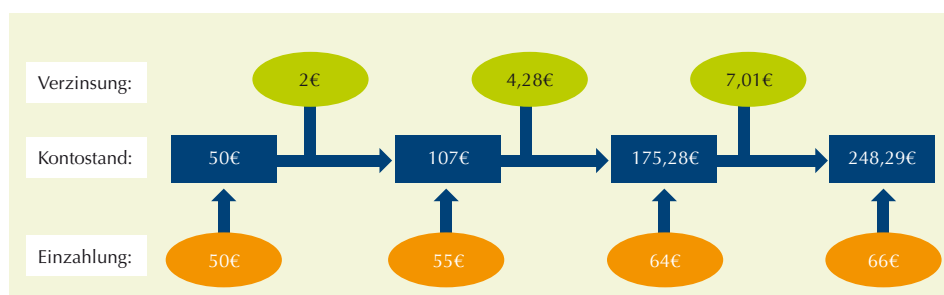
Man kann die Differenzengleichung noch weiter verallgemeinern:

$$K(n+1) = q \cdot K(n) + R(n+1)$$

Dabei sind die Werte des Zahlungsstroms $R(n+1)$ die Ein- beziehungsweise Auszahlungen am Ende des Zeitraums $[n, n+1]$. Diese Zahlungen sind nun nicht mehr alle identisch, sondern können sich unterscheiden.

Beispiel: In den letzten vier Jahren erhielt Daniel von seiner Tante Sabine zu Weihnachten ein Geldgeschenk in Höhe von 50 €, 55 €, 64 € und 66 €. Auch Daniel hat beschlossen, dieses Geld zur Bank zu bringen und auf sein Konto einzuzahlen. Wieviel Geld hat er im vierten Jahr am Weihnachtstag, wenn die Bank ihm einen Zins von 4% zahlt (mit anderen Worten: Wie lautet der Endwert des Zahlungsstroms)?

Lösung: Der Zahlungsstrom in Klammerschreibweise lautet (50; 55; 64; 66) mit jährlicher Zahlung.



Mit $K(0) = 0$, $R(1) = 50$, $R(2) = 55$, $R(3) = 64$ und $R(4) = 66$ erhalten wir:

Jahr	Kapital $K(n)$ zum 24.12.
1	50 €
2	$50 \text{ €} \cdot 1,04 + 55 \text{ €} = 107,00 \text{ €}$
3	$107,00 \text{ €} \cdot 1,04 + 64 \text{ €} = 175,28 \text{ €}$
4	$175,28 \text{ €} \cdot 1,04 + 66 \text{ €} = 248,29 \text{ €}$

Im vierten Jahr hat er somit einen Betrag von 248,29 € auf seinem Konto.

Aufgabe 6:

Angenommen, Tante Sabine hatte auf ihrem Konto vor dem ersten Geschenk 600 €. Berechne, welcher Betrag nach dem vierten Weihnachtsfest übrig ist, wenn dieses Konto auch mit 4% verzinst wird und sie ansonsten nicht auf das Konto zugreift?

Aufgabe 7:

Bestimme, welchen Betrag Tante Sabine zu Beginn mindestens auf dem Konto haben muss, um Daniel seine Geschenke zu machen (also den Barwert des Zahlungsstroms).

Gut zu wissen: Der ökonomische Hintergrund des Zinses und des Sparens ist die Idee, dass ein Konsum eines bestimmten Gutes in der Gegenwart als vorteilhafter/besser eingeschätzt wird als der Konsum des gleichen Gutes in der Zukunft. Das bedeutet, wenn man die Wahl hat, heute oder in einem Jahr etwas zu kaufen, würde man sich nur dann für einen späteren Konsum entscheiden, wenn man im Gegenzug eine größere Menge (oder bessere Qualität o. ä.) erhält. Der Zins ist dann als eine Art Entgelt zu verstehen, welches man dafür verlangen würde, dass man seinen Konsum in die Zukunft verschiebt. Beispiel: Wenn ich es als besser einschätze, in einem Jahr 104 € auszugeben als heute 100 €, dann lege ich mein Geld zu 4% auf mein Bankkonto. Umgekehrt: Da ich die Entscheidung treffe, mein Geld auf meinem Konto zu investieren, sind mir die 104 € in einem Jahr offensichtlich mehr wert als die 100 € heute.



Umsetzung im Tabellenkalkulationsprogramm

Verzinsungsprozesse lassen sich mit wenig Aufwand in einem Tabellenkalkulationsprogramm berechnen. Wir führen dies exemplarisch in Microsoft Excel an dem Beispiel von Erik und Onkel Christian vor.

	A	B	C	D	E
1					
2		Zins:	4%		
3					
4		Zeitpunkt	Einzahlung	Kontostand	Formel
5		heute	50,00	50,00	=C5
6		in einem Jahr	50,00	102,0	=D5*(1+C2)+C6
7		in zwei Jahren	50,00	156,08	=D6*(1+C2)+C7
8		in drei Jahren	50,00	212,32	=D7*(1+C2)+C8

In Zelle C2 wird der verwendete Zins geschrieben; wenn der Zins in der Rechnung geändert werden soll, reicht es, ihn an einer Stelle anzupassen. In den Zellen C5 bis C8 sind die Einzahlungen notiert; wenn man Einzahlungen unterschiedlicher Höhe oder Auszahlungen betrachten möchte, passt man diese Werte an. In den Zellen D5 bis D8 sind die Formeln für den Kontostand enthalten.

Kleiner Tipp: Wenn man in den Zellen D6 bis D8 statt „C2“ in der Formel „\$C\$2“ schreibt, kann man die Formel einfach kopieren und einfügen, ohne den Bezug auf die Zelle mit dem Zins zu verlieren.

Aufgabe 8:

Martina möchte in zwei Jahren genau 200 € auf ihrem Konto haben. Berechne, wieviel sie heute einzahlen muss. Der Zins beträgt 3%.

Berechne, wieviel sie einzahlen muss, damit sie nach zwei Jahren genau 400 € auf ihrem Konto hat. Erläutere, was Dir dabei auffällt.

Aufgabe 9:

Anton hat in seinem Laden seine Preise um 20% erhöht. Seine Stammkundin Berta verlangt von ihm, dass er die Preise sofort wieder um 20% senkt. Er antwortet ihr: „Das geht nicht, dann zahle ich ja drauf!“ Erläutere, was er damit meint.

Vertiefungsaufgabe:

In der Formel $K(n+1) = q \cdot K(n) + R(n+1)$ findet die Einzahlung $(n+1)$ am Ende der Periode (nachschüssig) statt. Leite her, wie sich die Formel ändern würde, wenn die Einzahlung am Anfang der Periode stattfindet und diese Einzahlung ebenfalls verzinst würde (vorschüssig). Erläutere, warum dieser Fall lediglich eine andere Interpretation des oben behandelten Falls der nachschüssigen Zahlung darstellt.

DER ZINSESZINS 3.

Beispiel: Marco wurde am 1. Januar 2000 geboren. Die Eltern von Marco haben zu seiner Geburt einen Betrag von 5.000 € als Altersvorsorge auf ein Konto eingezahlt. Die Bank verzinst diesen Betrag jährlich mit 5%. Welche Auszahlung erhält Marco zu Beginn seiner Rente mit 67 Jahren?

Zu Beginn zahlen die Eltern von Marco 5.000 € auf das Konto ein:

$$K(0) = 5.000 \text{ €}$$

Nach einem Jahr erhöht sich der Betrag um 5%:

$$\begin{aligned} K(1) &= K(0) \cdot (1 + 5\%) = K(0) + 0,05 \cdot K(0) \\ &= 5.000 \text{ €} + 250 \text{ €} = 5.250 \text{ €} \end{aligned}$$

In den nächsten Jahren erhöht sich der Betrag jeweils um 5%:

$$K(2) = K(1) \cdot (1 + 5\%) = 5.250,00 \text{ €} + 262,50 \text{ €} = 5.512,50 \text{ €}$$

$$K(3) = K(2) \cdot (1 + 5\%) = 5.512,50 \text{ €} + 275,63 \text{ €} = 5.788,13 \text{ €}$$

Die Bank rundet dabei auf ganze Cent-Beträge.

Mit den Methoden des vorherigen Kapitels kann man $K(67)$ schrittweise berechnen, allerdings ist die Berechnung etwas langwierig: Man muss die Differenzengleichung für jedes Jahr aufstellen und den Wert des Kontos für jedes Jahr berechnen. Das geht auch einfacher:

Zu Beginn zahlen die Eltern von Marco das Kapital $K(0)$ auf das Konto ein.

Nach einem Jahr erhöht sich der Betrag um 5%:

$$K(1) = K(0) \cdot (1 + 5\%)$$

Im zweiten Jahr erhöht sich der Betrag wieder um 5%:

$$\begin{aligned} K(2) &= K(1) \cdot (1 + 5\%) = K(0) \cdot (1 + 5\%) \cdot (1 + 5\%) \\ &= K(0) \cdot (1 + 5\%)^2 \end{aligned}$$

Im dritten und jedem weiteren Jahr wird der Kontostand erneut um 5% Zins erhöht:

$$K(3) = K(2) \cdot (1 + 5\%) = K(0) \cdot (1 + 5\%)^3$$

$$K(4) = K(3) \cdot (1 + 5\%) = K(0) \cdot (1 + 5\%)^4$$

...

$$K(67) = K(66) \cdot (1 + 5\%) = K(0) \cdot (1 + 5\%)^{67}$$

$$= 5.000 \text{ €} \cdot 1,05^{67} = 131.417,45 \text{ €}$$

So kann man direkt ausrechnen, wieviel Geld Marco an seinem 67. Geburtstag auf dem Konto hat.



**Zinseszinsformel:**

Wenn man ein Kapital $K(0)$ mit einem jährlichen Zins von p verzinst und außer den Zinszahlungen keine Änderungen vorgenommen werden, dann beträgt das Kapital nach n Jahren:

$$K(n) = K(0) \cdot (1 + p)^n$$

Man sieht hier, dass der Geldbetrag, den die Bank als Zins gezahlt hat, im Folgejahr selber wieder verzinst wird. Diesen Effekt nennt man Zinseszins – das bedeutet, dass der erhaltene Zins im Folgejahr selber wieder zum Zinsträger (also verzinst) wird. Hierdurch wächst der Geldbetrag exponentiell.

Aufgabe 1:

Du zahlst 1.000 € auf dein Konto, dieser Betrag wird mit einem jährlichen Zins von 4% über 12 Jahre verzinst. Wie ist Dein Kontostand am Ende?

Die obenstehende Formel gilt entsprechend, wenn man anstatt von einem Jahr von einer anderen Periodenlänge ausgeht (zum Beispiel ein Vierteljahr) UND der Zins passend für die Periode angegeben ist (vierteljährlicher Zins).

Aufgabe 2:

Du zahlst 2.000 € auf dein Konto, dieser Betrag wird mit einem vierteljährlichen Zins von 4% über 3 Jahre verzinst. Wie ist Dein Kontostand am Ende? Vergleiche dieses Ergebnis mit dem Ergebnis der vorherigen Aufgabe.

Aufgabe 3:

Du nimmst bei der Bank einen Kredit von 10.000 € auf. Dieser Kredit wird in einem Betrag nach 10 Jahren zurückgezahlt. Der jährliche Zins beträgt 7%. Wie hoch ist die Rückzahlung?

Gut zu wissen: Wenn man bei exponentiellen Wachstumsprozessen extrem lange Zeiträume annimmt, kommt man schnell zu unsinnigen Ergebnissen. Ein Beispiel hierfür ist der sogenannte Josephspfenning: Angenommen, im Jahre 0 hätte jemand einen Cent auf der Bank eingezahlt und genau 2000 Jahre mit $p\%$ verzinst. Überlege dir, welchen Betrag seine Nachfahren am Ende auf dem Konto haben, für die Zinssätze 1%, 3% und 5%. Rechne das Ergebnis in Gold um. Zur Info: Eine Feinunze Gold wiegt etwa 31,1g und kostete am 25. Dezember 2000 etwa 295 €, die Erdmasse beträgt ungefähr $6 \cdot 10^{24}\text{kg}$, die Sonnenmasse etwa $2 \cdot 10^{30}\text{kg}$.

Recherchiere hierzu auch die Weizenkornlegende nach Sissa ibn Dahir.

Exkurs: Es ist aufgrund des exponentiellen Wachstums nicht einfach, bei einem Verzinsungsprozess abzuschätzen, wie groß ein verzinsteter Betrag nach einigen Zinsperioden ist. Es gibt jedoch eine Daumenregel, die sogenannte 72er-Regel, mit der man das Ergebnis abschätzen kann. Die Regel besagt: Bei einem Zins p verdoppelt sich ein Betrag etwa alle $72/p$ Jahre.

Überprüfe die 72er-Regel anhand einiger Beispielzinssätze.

Überprüfe, ob die Varianten der 72er-Regel mit den Zahlen 71, 73 oder 74 (oder anderen Zahlen) auch funktioniert (gerne mit einem Tabellenkalkulationsprogramm)! Warum hat sich die 72er-Regel beim Kopfrechnen durchgesetzt?

Leite eine entsprechende Daumenregel her, mit der man den Zinssatz schätzen kann, den man benötigt, um einen Betrag in einem gegebenen Zeitraum zu verdoppeln.

Aufgabe 4:

An seinem 67. Geburtstag geht Marco in Rente. Er belässt das Geld weiterhin zu 5% auf seinem Konto, entnimmt aber jedes Jahr am Jahresende 13.000 € für eine große Reise. Berechne, nach wie vielen Jahren die Ersparnisse aufgebraucht sind. Berechne, wie lange das Geld reicht, wenn er jedes Jahr nur 6.500 € entnimmt.



Gut zu wissen: Dieser Punkt ist für Aktuarien – das sind Mathematiker in der Versicherungsbranche – sehr spannend. Wenn man nicht nur eine Person (wie in unserem Fall Marco) hat, die sein Vermögen als Zeitrente auszahlen lässt, sondern eine große Anzahl von Personen, dann kann man jeder Person der Gruppe eine lebenslange Rente garantieren. Die Idee ist, dass zunächst alle Personen zu Beginn einen Betrag einzahlen; in jedem darauf folgenden Jahr wird an die dann noch lebenden Personen ein fester Betrag ausgezahlt. Man spricht in diesem Fall auch von einer Leibrente. Die Herausforderung für Aktuarien ist dabei, die Anzahl der noch lebenden Personen möglichst genau einzuschätzen. Dabei ist die genaue Anzahl an Rentenbeziehern in jedem Jahr vorher natürlich noch nicht bekannt, die Höhe der jährlichen Rente für jeden einzelnen Rentenbezieher wird vom Versicherungsunternehmen allerdings garantiert. Hierfür entwickeln und nutzen Aktuarien sogenannte Sterbetafeln; hierin ist die mittlere Überlebenswahrscheinlichkeit der Versicherten für jedes Alter aufgelistet. Damit kann man bestimmen, wie groß der Versichertenbestand in jedem Jahr noch ist und wie hoch die Rente sein kann, die man jeder Person zahlen kann.

Beispiel: Zu Beginn sind 10 Personen im Bestand, jeder erhält eine jährliche Rente von 12.000 €.

	A	B	C
1	Jahr	Anzahl Personen	gez. Rente
2	1	10	120.000,00 €
3	2	8	96.000,00 €
4	3	6	72.000,00 €
5	4	3	36.000,00 €
6	5	1	12.000,00 €

Der Vorteil von Leibrenten gegenüber einer Zeitrente liegt auf der Hand: unabhängig davon, wie lange jeder einzelne lebt, erhält jeder Versicherte eine Rente bis zum Lebensende. Die Garantie dafür wird vom Versicherungsunternehmen getragen – sollten in einem Jahr mehr Personen als erwartet noch vorhanden sein und das ursprünglich eingezahlte Geld nicht ausreichen, muss das Versicherungsunternehmen danach die verbleibenden Renten zahlen.

Aufgabe 5:

(Handyfinanzierung): Sebastian möchte sich ein neues Handy kaufen und recherchiert dafür im Internet. Am Ende hat er sich drei Angebote herausgesucht.

1. Angebot: Er kauft sich das Handy direkt beim Fachhändler für 729 € und wählt einen günstigen Handytarif für 11,99 € monatlich.
2. Angebot: Er kauft das Handy zusammen mit einem Vertrag. Er zahlt für das Handy 309 € und für den Vertrag 29,99 € im Monat.
3. Angebot: Er zahlt für das Handy nur 1,99 €, der dazugehörige Vertrag kostet allerdings 44,99 € im Monat.

Die Handytarife sind alle beim selben Provider und bis auf den Preis völlig identisch. Die Laufzeit beträgt jeweils 24 Monate, die Zahlungen erfolgen immer am Monatsanfang. Die Bank verzinst derzeit Sparguthaben mit 4% pro Jahr.

Bestimme, welches Angebot das günstigste ist, indem Du die Barwerte berechnest.

Infobox Schuldenfalle: Im Zusammenhang mit Darlehen und langfristigen Verträgen (z. B. Handyverträge) droht eine große Gefahr: die Schuldenfalle! Sobald man solche Vereinbarungen eingeht, muss man unbedingt regelmäßig prüfen, ob man sich diese langfristig leisten kann. Wenn Du Dir beispielsweise ein Bein brichst und Deinen geplanten Ferienjob nicht antreten kannst, ist es vor allem dann verheerend, wenn das zu verdienende Geld komplett dafür vorgesehen ist, Dein bereits gekauftes Handy zu finanzieren.

Oftmals fängt dies mit Kleinigkeiten an: Ein langlaufender Handyvertrag, ein Kredit für den Sommerurlaub oder einen neuen Fernseher, eine Überziehung des Bankkontos. Wenn man finanziell ein hohes Risiko eingeht, reicht meist ein kleiner oder mittelgroßer Vorfall, um eine verhängnisvolle Spirale in Gang zu setzen. Sobald sich bestehende Schulden durch Kreditzinsen immer weiter erhöhen und die Einkünfte nicht ausreichen, um diese Schulden wieder abzubauen, wird es fatal – man befindet sich in der Schuldenfalle.

Nehmt Euch etwas Zeit und diskutiert in der Gruppe, wie man Schuldenfallen entdeckt, sie umgeht und was man machen kann, wenn man doch in eine solche Schuldenfalle geraten ist.

Anwendung: Festverzinsliche Wertpapiere

Wie kann es eigentlich sein, dass Banken Zinsen auf das auf den Bankkonten angelegte Ersparnis zahlen können? Auch Banken müssen die Zinsen, die sie ihren Kunden bezahlen, irgendwo herbekommen, das heißt: verdienen. Hierfür haben Banken im Wesentlichen zwei Möglichkeiten: Sie geben das angelegte Geld als Kredite heraus, auf die dann Kreditzinsen verdient werden, oder sie investieren das Geld in Wertpapiere.

Anstatt ihr Ersparnis auf einem Bankkonto zu deponieren, können Sparer sich auch selber diese Wertpapiere kaufen, die einen bestimmten Zinsertrag garantieren. Man spricht von festverzinslichen Wertpapieren (engl. Bonds). Hierbei wird zu Beginn ein gewisser Kaufpreis gezahlt, am Ende wird ein vorgegebener Nennwert fällig und während der Laufzeit können Zinszahlungen anfallen.

Beispiel: Ein dreijähriges festverzinsliches Wertpapier wird am 1. Januar 2017 zum Preis von 98 € ausgegeben. Am 1. Januar der Jahre 2018, 2019 und 2020 erhält der Besitzer des Wertpapiers einen Zins von 3 €, zusätzlich wird am 1. Januar 2020 noch der Nennwert des Wertpapiers in Höhe von 100 € ausgezahlt.

	1.1.2017	1.1.2018	1.1.2019	1.1.2020
	Kauf für 98	Zins: 3	Zins: 3	Zins: 3 Rücknahme: 100
Zahlungsstrom	-98	3	3	103

Die wichtigsten Eigenschaften solcher Wertpapiere sind :

- der Nennwert oder Nominalwert, das heißt der Betrag, der dem Inhaber dieses Wertpapiers am Ende ausgezahlt wird,
- die Laufzeit und
- die Zinszahlungen während der Laufzeit.

Der Zinssatz wird dabei als Prozentwert des Nennwertes ausgedrückt, ein Wertpapier mit einem Nennwert von 200 € und einem jährlichen Zins von 2,5% ergibt eine Zinszahlung von 5 € in jedem Jahr.

Der Ausgabepreis/Kaufpreis eines solchen Papiers ist dabei in der Regel nicht vorgegeben. Er wird über Angebot und Nachfrage an einer Wertpapierbörse bestimmt.

Für Emittenten (das heißt diejenigen, die solche Papiere herausgeben) stellt sich der Zahlungsstrom in entgegengesetzter Richtung dar: Bei Ausgabe (Verkauf der Papiere) erhalten sie den gezahlten Betrag, sie müssen im Gegenzug dafür allerdings in den Folgejahren die Zinszahlung und die Rücknahme gegen den Nennwert garantieren.

Selbstverständlich können wir diese Wertpapiere als Zahlungsstrom interpretieren. Da es hier immer Zahlungen in beide Richtungen gibt (bei Emission des Wertpapiers erhält der Emittent den entsprechenden Preis, in den Folgejahren zahlt er Zins und Rückgabe), muss natürlich auf die Verwendung von Vorzeichen geachtet werden.

Aufgabe 6:

Notiere das Beispiel auf Seite 28 des dreijährigen festverzinslichen Wertpapiers als Zahlungsstrom in Klammerschreibweise.

Wenn man mehrere (auch unterschiedliche) festverzinsliche Wertpapiere hat, bezeichnet man dies als Portfolio von festverzinslichen Wertpapieren. Der Zahlungsstrom, den das gesamte Portfolio hat, lässt sich, wie in Kapitel 1 bereits beschrieben, einfach bestimmen. Man bildet dazu die Summe aller Zahlungsströme der Wertpapiere, die in dem Portfolio enthalten sind.

Beispiel: Betrachte ein Portfolio, das aus zwei Wertpapieren besteht:

- ein Papier mit einem Nennwert von 200 €, einem jährlichen Zinssatz von 2% und 3 Jahren Laufzeit und
- ein Papier mit einem Nennwert von 100 €, einem jährlichen Zinssatz von 3% und 4 Jahren Laufzeit.

Das erste wird heute für 202 €, das zweite für 104 € erworben.

Man muss hier vorsichtig sein, die gebräuchliche Wortwahl bei festverzinslichen Wertpapieren ist etwas missverständlich. Die jährlichen Zahlungen werden als Zins bezeichnet, sie sind allerdings Bestandteil des Zahlungsstroms und von dem Zins der Diskontierung zu unterscheiden. Man kann sich dies hierdurch klar machen: Der jährliche Zinssatz eines festverzinslichen Wertpapiers ist eine für das Wertpapier festgelegte Eigenschaft, sie kann theoretisch beliebig gewählt werden, zum Beispiel ein jährlicher Zins von 50%.

Das erste Papier hat somit einen Zahlungsstrom $(-202; 4; 4; 204)$, das zweite einen Zahlungsstrom $(-104; 3; 3; 3; 103)$. Im letzten Jahr werden dabei jeweils die letzte Zinszahlung sowie der Nennwert fällig. Der Zahlungsstrom des Portfolios lautet $(-306; 7; 7; 207; 103)$.

Eine besondere Art von festverzinslichen Wertpapieren sind die sogenannten Nullkuponbonds (engl. Zerobonds). Diese Wertpapiere sind besonders einfach, sie haben lediglich eine Laufzeit und einen Nennwert. Zinszahlungen während der Laufzeit werden nicht vorgenommen. Der Inhaber solcher Wertpapiere konnte also lediglich aus der Differenz zwischen Kaufpreis und Nennwert einen Gewinn erzielen, diese ist wegen der fehlenden Zinszahlung in der Regel größer als bei anderen festverzinslichen Wertpapieren.

Beispiel: Ein Nullkuponbond mit der Laufzeit 3 Jahre und dem Nennwert 100 € hat bei einem Kaufpreis von 95 € heute den Zahlungsstrom $(-95; 0; 0; 100)$.



Gut zu wissen: Der Name Nullkuponbond hat folgende Herkunft. Festverzinsliche Wertpapiere werden schon seit langer Zeit gehandelt. Natürlich musste sichergestellt werden, dass jeder Inhaber seine Zinszahlung in jedem Jahr nur einmal abrufen. Dafür waren an alten festverzinslichen Wertpapieren „Papierschnipsel“ (Kupons oder Coupons, von franz. couper, (ab-)schneiden) angeheftet, die man im Gegenzug zur Auszahlung der Zinszahlung abtrennen konnte. Daher werden festverzinsliche Wertpapiere mit Zinszahlungen auch Kuponbonds genannt. Nullkuponbonds sahen solche Zinszahlungen nicht vor und hatten insofern keine Kupons.



Alter amerikanischer Kuponbond von 1879, Kupons am rechten Rand

Man kann nun – und dies ist in einigen Fällen, wie wir noch sehen werden, sehr hilfreich – einen Kuponbond als Portfolio von Nullkuponbonds betrachten. Dazu interpretiert man sowohl die Zinszahlungen als auch die Auszahlung des Nennwertes als die Nennwerte von Nullkuponbonds mit jeweils passenden Laufzeiten.

Beispiel: Ein Kuponbond mit dem Nennwert 100, einer Verzinsung von 5% und einer Laufzeit von 3 Jahren entspricht einem Portfolio aus:

- einem Nullkuponbond mit einer Laufzeit von 1 Jahr und einem Nennwert von 5,
- einem Nullkuponbond mit einer Laufzeit von 2 Jahren und einem Nennwert von 5 und
- einem Nullkuponbond mit einer Laufzeit von 3 Jahren und einem Nennwert von 105.

Diese Aufteilung ist nicht eindeutig, anstatt des letzten Nullkuponbonds kann man beispielsweise auch zwei Nullkuponbonds mit drei Jahren Laufzeit benutzen, von denen der eine einen Nennwert von 100 und der andere einen Nennwert von 5 hat. Wichtig ist nur, dass der Zahlungsstrom des Kuponbonds und der Zahlungsstrom des Portfolios aus Nullkuponbonds identisch sind.

Bei diesem Beispiel mit der Aufteilung des Kuponbonds in Nullkuponbonds haben wir zur Vereinfachung den anfänglichen Ausgabepreis ignoriert, da es etwas aufwändiger ist, diesen mit aufzuteilen. Möchte man dies dennoch machen, geht man wie folgt vor:

Beispiel: Ein Kuponbond mit dem Nennwert 100, einer Verzinsung von 5% und einer Laufzeit von 3 Jahren hat einen Ausgabepreis von 104,49 €, der vollständige Zahlungsstrom lautet also: (-104,49; 5; 5; 105). Hieraus kann man einen Diskontierungszins, den internen Zins, von 3,4% ableiten (wie, erfährst Du im Abschnitt „Zum Weiterdenken“ im kommenden Kapitel). Man erhält dadurch die folgende Gleichung:

$$104,49 \text{ €} = 1,034^{-1} \cdot 5 \text{ €} + 1,034^{-2} \cdot 5 \text{ €} + 1,034^{-3} \cdot 105 \text{ €}$$

Damit erhält man die anteiligen Kaufpreise der Nullkuponbonds als die Barwerte der Teilzahlungen:

$$4,84 \text{ €} = 1,034^{-1} \cdot 5 \text{ €}$$

$$4,68 \text{ €} = +1,034^{-2} \cdot 5 \text{ €}$$

$$94,98 \text{ €} = +1,034^{-3} \cdot 105 \text{ €}$$

Hier ist zu beachten, dass die Idee des Zinses in zwei Ausprägungen einfließt: einerseits werden die jährlichen Kuponzahlungen als Zinszahlungen für den Käufer des Bonds – und somit als ein fester Bestandteil des Wertpapiers – geleistet, andererseits erhält man bei der Bewertung einen Diskontierungszins, der die Verschiebung der Zahlungen zwischen den Perioden widerspiegelt. Hier muss man sorgfältig unterscheiden.

Gut zu wissen (Financial Engineering): Wir haben hier einen Kuponbond durch einfachere Wertpapiere, die Nullkuponbonds, dargestellt. Dieses Vorgehen ist das Täglich-Brot vieler MathematikerInnen, die im Investmentbanking arbeiten. Sie bilden komplexere Finanzprodukte durch einfachere nach (man spricht hier von duplizieren), die dieselben Eigenschaften haben, z. B. dieselben Zahlungsströme liefern. Ein Portfolio, das dieselben Eigenschaften wie ein gegebenes komplexes Finanzprodukt hat, wird dabei auch Hedge-Portfolio genannt. Der Sinn von einem solchen Vorgehen ist, dass man beispielsweise den Preis eines Portfolios mit einfachen Wertpapieren leicht bestimmen kann – und wenn dieses Portfolio denselben Zahlungsstrom wie ein kompliziertes Wertpapier liefert, kann man davon ausgehen, dass die Preise identisch sind. Hierdurch können somit die Preise von anderen Wertpapieren hergeleitet werden.

Forschungsauftrag: Informiere Dich im Internet, welche festverzinslichen Wertpapiere von der Bundesrepublik Deutschland ausgegeben werden und worin sie sich unterscheiden. Präsentiere anschließend Deine Ergebnisse.





Hintergrund: Festverzinsliche Wertpapiere werden häufig von Staaten und Unternehmen ausgegeben, um Ihre entsprechenden Ausgaben zu finanzieren. Für die Bundesrepublik Deutschland sind beispielsweise die Bundesanleihen, die zu den festverzinslichen Wertpapieren gehören, das wichtigste Finanzierungsinstrument. Wenn in einem Jahr das Steueraufkommen nicht ausreicht, um dem Staat die Erfüllung seiner hoheitlichen Aufgaben zu ermöglichen, gibt der Staat solche Wertpapiere aus, um von dem eingenommenen Geld die geplanten Ausgaben zu finanzieren. Eine Staatsverschuldung ist somit vielschichtig zu sehen: Einerseits belastet eine zu hohe Staatsverschuldung die zukünftigen Generationen, die diese Schulden bewältigen müssen (insbesondere die Zinsen darauf), andererseits wird eine gewisse Staatsverschuldung benötigt, um über Banken und Versicherungen – und somit den Bank- und Versicherungskunden – Sparprozesse zu ermöglichen.

Für Unternehmen ist die Ausgabe von Unternehmensanleihen eine Möglichkeit neben der normalen Kreditaufnahme bei Banken, Geld für die Finanzierung neuer Investitionen, beispielsweise einer neuen Fabrikanlage, zu erhalten. Die Gewinne, die aus dieser Investition erwirtschaftet werden, können dann zur Bezahlung der Zinsen und der Rückzahlung der Unternehmensanleihe genutzt werden. Solange die gesteigerte Produktivität mehr Ertrag als die Rückzahlung der Kredite und ausgegebenen Wertpapiere liefert, ist für Unternehmen dieses Vorgehen von Vorteil. Andererseits bietet diese Anlageform einem Investor die Möglichkeit, direkt an geschickten Investments und an Expansion von Unternehmen zu partizipieren.

BEWERTUNG VON ZAHLUNGSSTRÖMEN 4.

Der Autokauf – Teil 2

So langsam wird Peter ungeduldig. Sie sitzen immer noch beim Autohändler, vor der Tür steht immer noch der neue Wagen und sein Vater denkt immer noch über die Finanzierungsalternativen nach. Dabei ist die Sache für Peter eigentlich klar: Wir haben drei Zahlungsströme zur Auswahl, wir schauen, welcher der günstigste für uns ist – und den nehmen wir dann.

Da hat Peter eine Idee: „Papa, wieviel Zins kriegst Du eigentlich auf Deinem Bankkonto?“ „4%, warum?“ „Ganz einfach! Wenn Du die Finanzierungsalternativen vergleichen möchtest, dann bestimme doch einfach den Barwert oder den Endwert der Alternativen und vergleiche diese. Als Zins verwendest Du die 4%, die Du auch auf der Bank erhalten würdest.“

„Gute Idee“, sagt Peters Vater und zückt seinen Taschenrechner. „Dann lass uns doch die Barwerte bestimmen. Wie machen wir das beim ersten Zahlungsstrom?“

Peter antwortet: „Das ist leicht! Da der Betrag sofort fällig wäre, brauchen wir ihn gar nicht auf- oder abzuzinsen. Der Barwert ist also ebenfalls 100.000 €.“

Peter überlegt weiter: „Für den Barwert der zweiten Finanzierungsalternative nehme ich den Zahlungsstrom und diskontiere jede Zahlung auf den heutigen Tag.“

Er rechnet:

$$21.199 \text{ €} \cdot 1,04^0 + 21.199 \text{ €} \cdot 1,04^{-1} + 21.199 \cdot 1,04^{-2} \\ + 21.199 \cdot 1,04^{-3} + 21.199 \cdot 1,04^{-4} = 98.149,15 \text{ €}$$

Peters Vater freut sich: „Super, dann brauche ich ja heute nur 98.149,15 € auf meinem Konto haben und kann davon sämtliche Raten bezahlen. Lass mich mal die letzte Alternative durchrechnen!“

Peters Vater rechnet:

$$30.000 \text{ €} \cdot 1,04^0 + 9.116 \text{ €} \cdot 1,04^{-1} + 9.116 \text{ €} \cdot 1,04^{-2} + 9.116 \text{ €} \cdot 1,04^{-3} \\ + 9.116 \text{ €} \cdot 1,04^{-4} + 9.116 \text{ €} \cdot 1,04^{-5} + 9.116 \text{ €} \cdot 1,04^{-6} + 9.116 \text{ €} \cdot 1,04^{-7} \\ + 9.116 \text{ €} \cdot 1,04^{-8} + 9.116 \text{ €} \cdot 1,04^{-9} \\ = 97.780,48 \text{ €}$$

Peter: „Schau mal, das ist ja noch besser als die zweite Variante. Ich denke, wir haben eine Lösung gefunden!“

Peters Vater: „Genau, und das Geld, das ich spare, weil ich die dritte statt der ersten Alternative nehme, ist der Barwert der Eisbecher, die ich Dir in den nächsten Jahren als Dankeschön ausbebe.“ Peter fängt direkt an zu rechnen, wann er wohl wie viele Eiskugeln essen kann.

Wir haben in den vorherigen Kapiteln bereits gesehen, dass man für Zahlungsströme und zu einem gegebenen Zins einen Barwert und einen Endwert bestimmen kann. Diese Werte können genutzt werden, um zwei Zahlungsströme zu vergleichen. Standardmäßig wird für die Bewertung der Barwert eines Zahlungsstromes herangezogen.

Die Formel für den Barwert BW eines Zahlungsstromes $R(0), R(1), R(2), \dots R(n)$ unter dem Zins p lautet:

$$BW = R(0) + \left(\frac{1}{1+p}\right) \cdot R(1) + \left(\frac{1}{1+p}\right)^2 \cdot R(2) + \dots + \left(\frac{1}{1+p}\right)^n \cdot R(n)$$

Beispiel: Der Barwert des Zahlungsstroms (10, 20, 15, 20, 5) unter dem Zins $p = 3\%$ beträgt:

$$10 + \left(\frac{1}{1,03}\right) \cdot 20 + \left(\frac{1}{1,03}\right)^2 \cdot 15 + \left(\frac{1}{1,03}\right)^3 \cdot 20 + \left(\frac{1}{1,03}\right)^4 \cdot 5 \approx 66,30$$

Man sieht, dass hierbei jede einzelne Zahlung auf den Bewertungstag (also heute) diskontiert wird. Hierdurch sind die Werte vergleichbar und können addiert werden.

Der Endwert kann ebenfalls für die Bewertung eines Zahlungsstromes verwendet werden. Beim Endwert besteht allerdings das mögliche Problem, dass Zahlungsströme, die verglichen werden sollen, zeitlich gleich lang sein müssen, ansonsten ist ein Vergleich nicht sinnvoll. In diesem Fall kann man den „kürzeren“ Zahlungsstrom mit Nullen „verlängern“.

Die Formel für den Endwert EW eines Zahlungsstromes $R(0), R(1), R(2), \dots R(n)$ unter dem Zins p lautet:

$$EW = (1+p)^n \cdot R(0) + (1+p)^{n-1} \cdot R(1) + \dots + (1+p)^1 \cdot R(n-1) + R(n)$$

Beispiel: Der Endwert des Zahlungsstroms (10; 20; 15; 20; 5) unter dem Zins $p = 3\%$ beträgt:

$$1,03^4 \cdot 10 + 1,03^3 \cdot 20 + 1,03^2 \cdot 15 + 1,03 \cdot 20 + 5 \approx 74,62$$

Aufgabe 1:

Berechne den Barwert des Zahlungsstroms (10; 20; 15; 20; 5) auch unter den Zinsen 0%, 1%, 2% und 4%. Beurteile das Ergebnis, wenn man den Zins 0% verwendet.

Aufgabe 2:

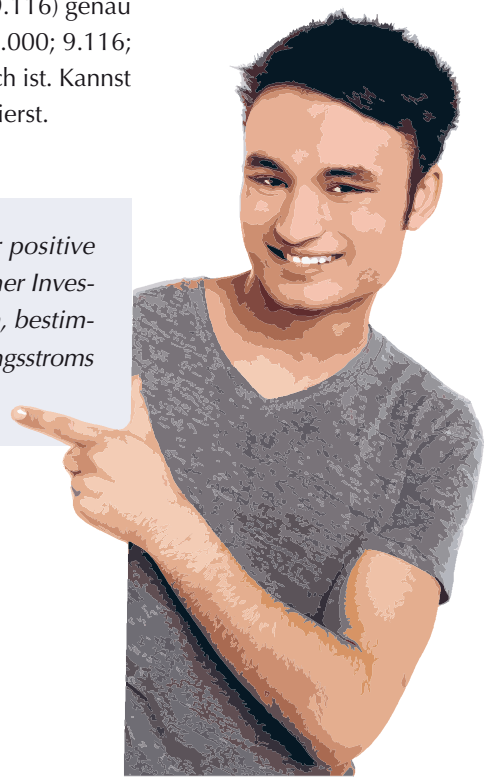
Berechne die Endwerte von allen drei Finanzierungsalternativen von der Autofinanzierung von Peters Vater. Bewerte das Ergebnis deiner Rechnung.

Aufgabe 3:

Betrachte die Formeln für den Barwert und den Endwert eines Zahlungsstroms sowie die beiden Beispiele. Leite eine Formel her, wie man aus einem Barwert (und einem gegebenen Zins) den Endwert des Zahlungsstroms bestimmt und umgekehrt.

Zum Weiterdenken: Na endlich, das neue Auto ist bestellt! Peter kann es kaum erwarten, dass sein Vater und er es abholen können. Aus Interesse (und um die Zeit zu überbrücken) überlegt sich Peter, ob man wohl einen Zins bestimmen kann, so dass der Barwert der dritten Finanzierungsalternative für das Auto seines Vaters gerade dem Sofort-Kaufpreis (Vorschlag 1) des Autos entspricht. Mit anderen Worten: er sucht den Zins, so dass der Barwert des Zahlungsstroms aus der dritten Alternative (30.000; 9.116; ...; 9.116) genau 100.000 € entspricht. Er sucht also den Zins, so dass der Zahlungsstrom (-70.000; 9.116; ...; 9.116) gerade den Barwert 0 hat. Er stellt fest, dass dies gar nicht so einfach ist. Kannst Du ihm helfen? Beginne damit, dass Du einige Werte für den Zins ausprobierst.

*Zahlungsströme, die zu Beginn negative Werte (Ausgaben) und später positive Werte (Erträge) haben, lassen sich als Investitionen interpretieren. Zu einer Investition kann man einen **Effektivzins**, die **interne Rendite** dieser Investition, bestimmen. Dieser Zins p ist gerade derjenige, für den der Barwert dieses Zahlungsstroms den Wert 0 hat.*



$$0 = R(0) + \left(\frac{1}{1+p}\right) \cdot R(1) + \left(\frac{1}{1+p}\right)^2 \cdot R(2) + \dots + \left(\frac{1}{1+p}\right)^n \cdot R(n)$$

Leider gibt es in der Regel keine einfache Methode, mit der man die Rendite direkt bestimmen kann, für längere Zahlungsströme muss es noch nicht einmal geschlossene Formeln geben. Hier hilft man sich in der Regel mit numerischen Verfahren (mit anderen Worten: planvollem Ausprobieren).

Beispiel (Intervallhalbierung): Peter stellt fest, dass der Barwert des Zahlungsstroms zu den Zinsen 3% und 4% folgende Werte hat:

- 3%: 978,17 €
- 4%: -2.219,52 €

Also muss der interne Zins, den Peter sucht, zwischen 3% und 4% liegen. Als nächstes probiert Peter einen Wert zwischen 3% und 4%, beispielsweise 3,5%. Dies liefert den Wert -648,33 €. Also liegt der gesuchte Wert zwischen 3% und 3,5%. So macht Peter weiter und findet den gesuchten Wert von etwa 3,3% – oder bricht das Verfahren irgendwann ab, weil er den gesuchten Wert hinreichend genau einschränken kann.

Umsetzung im Tabellenkalkulationsprogramm

Für die Rechnungen mit Zahlungsströmen eignen sich Tabellenkalkulationsprogramme. Viele benötigte Funktionen werden hier direkt mitgeliefert und müssen nicht mehr eigenhändig gerechnet werden. Exemplarisch stellen wir zwei wichtige Funktionen in Microsoft Excel vor; die Funktionen (und weitere) sind aber auch in anderen Tabellenkalkulationsprogrammen verfügbar.

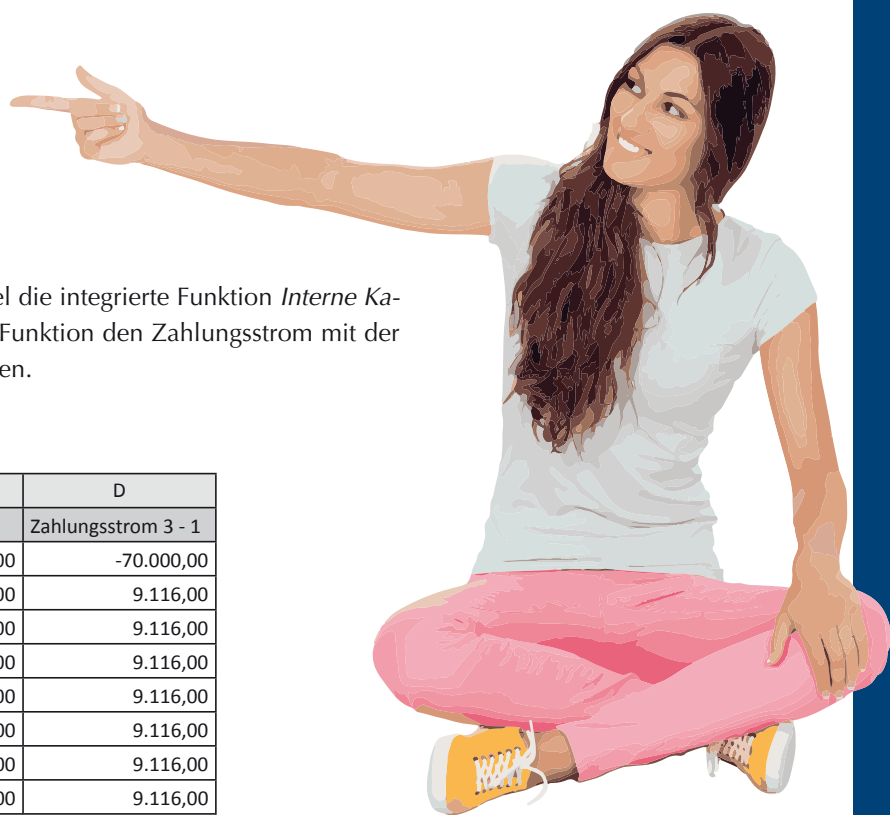
Für die Berechnung des Barwertes verwendet man die Funktion NettoBarWert NBW(). Als ersten Parameter erhält diese den verwendeten Zins, danach den Zahlungsstrom, dessen Barwert bestimmt werden soll. Beachte dabei, dass die Funktion von nachschüssigen Zahlungen ausgeht, also von Zahlungen am Ende der jeweiligen Periode. Daher wird insbesondere die erste Zahlung um eine Periode diskontiert. Wenn man dies vermeiden möchte – beispielsweise, weil wie in unserem Beispiel eine vorschüssige Zahlung (zum Periodenanfang) vorliegt –, verwendet man nur die zweite bis zur letzten Zahlung in der Formel NBW() und addiert den ersten Wert hinzu. Alternativ kann man den kompletten Zahlungsstrom mit NBW() bewerten und dann um eine Periode aufzinsen.

	A	B	C
1			
2		Zeitpunkt	Zahlungsstrom 3
3		heute	30.000,00
4		1 Jahr	9.116,00
5		2 Jahr	9.116,00
6		3 Jahr	9.116,00
7		4 Jahr	9.116,00
8		5 Jahr	9.116,00
9		6 Jahr	9.116,00
10		7 Jahr	9.116,00
11		8 Jahr	9.116,00
12		9 Jahr	9.116,00
13			
14	Barwerte zum Zins		4,00%
15			97.780,48
16	Formel in C15:		=NBW(C14;C4:C12)+C3

Für die Berechnung des Effektivzinses enthält Excel die integrierte Funktion *Interne Kapital Verzinsung* IKV(). Als Parameter erhält diese Funktion den Zahlungsstrom mit der anfänglichen Ausgabe und den späteren Rückflüssen.

	A	B	C	D
1	Zeitpunkt	Zahlungsstrom 1	Zahlungsstrom 3	Zahlungsstrom 3 - 1
2	heute	100.000,00	30.000,00	-70.000,00
3	1 Jahr		9.116,00	9.116,00
4	2 Jahr		9.116,00	9.116,00
5	3 Jahr		9.116,00	9.116,00
6	4 Jahr		9.116,00	9.116,00
7	5 Jahr		9.116,00	9.116,00
8	6 Jahr		9.116,00	9.116,00
9	7 Jahr		9.116,00	9.116,00
10	8 Jahr		9.116,00	9.116,00
11	9 Jahr		9.116,00	9.116,00
12				
13			Effektivzins	3,2986%
14			Formel in D13	=IKV(D2:D11)

Viele Mathematiker und Ökonomen, die in Wirtschaftsunternehmen arbeiten, nutzen solche Tabellenkalkulationsprogramme täglich für derartige Berechnungen.



Vertiefung: Unterjähriges Sparen, gemischte und stetige Verzinsung und die Eulersche Zahl

Lineare Verzinsung

Erinnerst Du Dich noch an das Beispiel von Marco im Kapitel zum Zinseszins? Er hat in jedem Jahr den bereits erhaltenen Zins wieder verzinst bekommen. Wie sähe die Situation aus, wenn wir den erhaltenen Zins nicht weiter mitverzinsen, sondern lediglich das ursprüngliche Kapital berücksichtigen? Wir schauen uns dafür wieder das Beispiel von Marco an.

Beispiel: Marco wurde am 1. Januar 2000 geboren. Die Eltern von Marco haben zu seiner Geburt einen Betrag von 5.000 € als Altersvorsorge auf ein Konto eingezahlt. Die Bank verzinst diesen Betrag jährlich mit 5%, jetzt allerdings linear. Welche Auszahlung erhält Marco zu Beginn seiner Rente mit 67 Jahren?

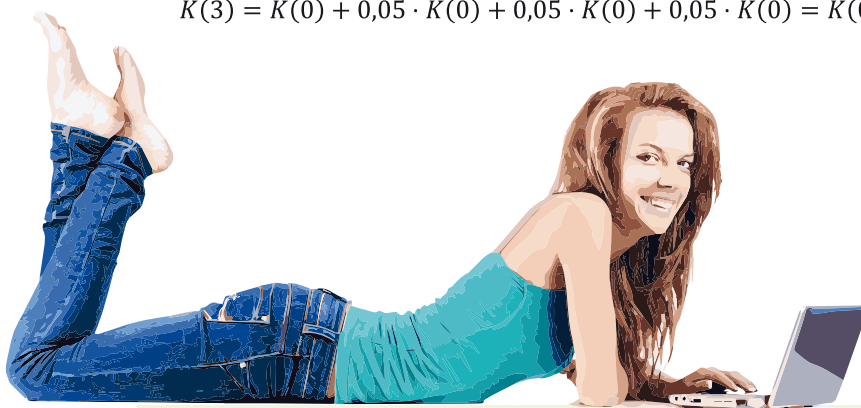
Nach einem Jahr wäre der Wert auf dem Konto:

$$K(1) = K(0) + 0,05 \cdot K(0) = K(0) \cdot (1 + 5\%)$$

In den Folgejahren wäre der Wert:

$$K(2) = K(0) + 0,05 \cdot K(0) + 0,05 \cdot K(0) = K(0) \cdot (1 + 2 \cdot 5\%)$$

$$K(3) = K(0) + 0,05 \cdot K(0) + 0,05 \cdot K(0) + 0,05 \cdot K(0) = K(0) \cdot (1 + 3 \cdot 5\%)$$



Lineare Verzinsung:

Wenn man ein Kapital $K(0)$ mit einem jährlichen Zins von p verzinst, **keinen Zinseszins** zahlt und außer den Zinszahlungen keine Änderungen vorgenommen werden, dann beträgt das Kapital nach n Jahren:

$$K(n) = K(0) \cdot (1 + n \cdot p)$$

Aufgabe 4:

Berechne, welchen Betrag Marco nach 67 Jahren hätte, wenn sein Guthaben linear mit 5% verzinst würde. Trage die Werte für die ersten 8 Jahre in ein Diagramm ein und erläutere, warum man von „linearer Verzinsung“ spricht.

Berechne, mit welchem Zins Marco sein Geld verzinst bekommen müsste, wenn er bei linearer Verzinsung denselben Endbetrag nach 67 Jahren bekommen wollte wie bei exponentieller Verzinsung?

Interpretiere die Ergebnisse.

Die lineare Verzinsung tritt in der Praxis selten auf. Aus historischen Gründen wird sie im Bankwesen bei kurzen Zeiträumen – das heißt kürzer als die Verzinsungsperiode – angewendet. Wir werden hierauf später, im Abschnitt zur gemischten Verzinsung, nochmal zurückkommen.

EXKURS: Die Eulersche Zahl

Bislang sind wir in der Regel davon ausgegangen, dass die Verzinsungsperiode immer ein Jahr beträgt. Für den folgenden kleinen Exkurs wollen wir diese Annahme fallen lassen.

Beispiel: Eine Bank legt ein Angebot vor, nach dem sich ein angelegtes Kapital $K(0)$ innerhalb von 10 Jahren verdoppelt. Das sind 100% Zinsen in 10 Jahren. Ein Zinseszins wird dabei nicht berücksichtigt (lineare Verzinsung).

Angenommen, Du kannst das Geld jederzeit abheben und der anteilige Zins wird Dir bis zum Abhebdatum vollständig ausgezahlt. Wenn Du direkt den abgehobenen Geldbetrag zu denselben Bedingungen wieder anlegst, kannst Du hierdurch einen zusätzlichen Zinseszinsseffekt erzeugen, da der erwirtschaftete Zins nun selber wieder als Zinsträger fungiert.

Würdest Du das Kapital jährlich abheben und direkt wieder neu anlegen, so wird dies mit dem Zinssatz von 10% pro Jahr verzinst. Dann stünde am Ende der folgende Betrag zur Verfügung

$$K_{10}(10) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx K(0) \cdot 2,5937$$

Dies entspricht nach 10 Jahren mehr als dem doppelten Anfangskapital.

Beispielaufgabe:

Ermittle den Vervielfältigungsfaktor des eingesetzten Kapitals, wenn man die Zeiträume, nach denen die Zinsen gezahlt werden, immer kleiner wählt. Berechne den Faktor insbesondere für den Fall, dass das Kapital täglich, stündlich oder sekundlich gezahlt würde. Stelle eine allgemeine Formel für den Verzinsungsfaktor auf.

Lösung:

Halbjährliche Verzinsung, d.h. 20 Zeiträume, mit 5% Zinsen:

$$K_{20}(10) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{20}\right)^{20} \approx K(0) \cdot 2,6533$$

Vierteljährliche Verzinsung, d.h. 40 Zeiträume, mit 2,5% Zinsen:

$$K_{40}(10) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{40}\right)^{40} \approx K(0) \cdot 2,6851$$

Allgemeine Formel:

$$K_n(10) = K(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Mit dieser Formel ergibt sich (der Faktor ist jeweils gerundet):

Zahlweise	10 Jahre	jährlich	halbj.	viertelj.	monatl.	täglich	stündlich	sekündl.
n	1	10	20	40	120	3.650	87.600	315.360.000
Faktor	2,0000	2,5937	2,6533	2,6851	2,7070	2,7179	2,71827	2,718282

Wie die Tabelle vermuten lässt, steigt der Faktor, der die Vermehrung des Kapitals angibt, mit Verkürzung der Zahlungszeiträume nicht ins Unendliche. Werden die Zeiträume, nach denen die Zinsen gezahlt werden, unendlich klein, spricht man von stetiger Verzinsung. Der Faktor, der sich hierbei ergibt, wird Eulersche Zahl genannt und mit e bezeichnet. Diese Eulersche Zahl ist, genau wie die Kreiszahl π , eine irrationale Zahl, eine der wesentlichen Konstanten in der Mathematik und die daraus abgeleitete Exponentialfunktion taucht in vielen Anwendungsbereichen, beispielsweise in der Physik, Technik und in den Wirtschaftswissenschaften, auf.

Gemischte Verzinsung

Im Abschnitt zum Zinseszins haben wir gesehen, dass der Übergang von einem linearen Wachstum zu einem exponentiellen Wachstum zu veränderten Ergebnissen führt. Im Vergleich sieht man, dass das exponentielle Wachstum den tatsächlichen Wachstumsprozess besser widerspiegelt, das lineare Wachstum allerdings rechnerisch einfacher handhabbar ist. In der Praxis wenden Banken und andere Finanzunternehmen daher die sogenannte gemischte Finanzierung an. In dem Jahr der Kapitalanlage bis zum Jahresende wird der angesparte Betrag linear verzinst, über die Folgejahre wird ein exponentielles Wachstum angenommen, und im Jahr der Auszahlung wird vom Jahresanfang bis zum Auszahlungstag wieder linear verzinst. Dieser Sachverhalt wird manchmal dadurch ausgedrückt, dass man sagt, dass die Zinsgutschrift jährlich erfolgt.

Beispiel: Friedrich hat 10.000 € am 1. Juli 2015 in einem Sparvertrag angelegt. Die Bank zahlt ihm 5% Zins pro Jahr (gemischte Verzinsung). Die Auszahlung erfolgt am 30. Juni 2023. Die Bank rechnet nun wie folgt:

Im ersten Schritt wird das Kapital bis zum Jahresende linear verzinst. Da hier nur für ein halbes Jahr verzinst wird, wird der Zinssatz entsprechend reduziert:

$$K(1) = 10.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,5 \cdot 5\%)$$

Dies entspricht dem Wert des Vermögens am Ende des Jahres 2015.

Im zweiten Schritt erfolgt die Verzinsung vom 1. Januar 2016 bis zum 31. Dezember 2022 mittels der Zinseszinsformel:

$$K(2) = K(1) \cdot (1 + 5\%)^7$$

Im dritten Schritt wird wieder linear vom 1. Januar bis zum 30. Juni 2023 verzinst:

$$K(3) = K(2) \cdot (1 + 0,5 \cdot 5\%)$$

Dann beträgt die Auszahlung:

$$10.000 \text{ €} \cdot (1 + 0,5 \cdot 5\%) \cdot (1 + 5\%)^7 \cdot (1 + 0,5 \cdot 5\%) = 14.783,35 \text{ €}$$

Sofern die Ein- und Auszahlungsstichtage nicht auf so glatte Tage wie das Jahresende oder die Jahresmitte fallen, wird oftmals zur Vereinfachung die sogenannte 30/360-Tages-Methode angewendet. Dabei nimmt man vereinfachend an, dass jeder Monat genau 30 Tage hat (und das Jahr somit 360 Tage). Sowohl vom 12. Februar als auch vom 12. März bis zum jeweiligen Monatsende sind es immer 18 Tage. Hiermit lassen sich dann die jeweiligen Anteile leichter bilden.



Beispiel: Friedrich hat außerdem 10.000 € am 1. August 2015 in einem Sparvertrag angelegt. Die Bank zahlt ihm 5% Zins pro Jahr (gemischte Verzinsung). Die Auszahlung erfolgt am 15. Februar 2023. Dann beträgt die Auszahlung:

$$10.000 \text{ €} \cdot \left(1 + \frac{150}{360} \cdot 5\%\right) \cdot (1 + 5\%)^7 \cdot \left(1 + \frac{45}{360} \cdot 5\%\right) = 14.453,93 \text{ €}$$

Dabei entspricht der Zeitraum vom 1. August bis zum 31. Dezember 2015 genau 5 Monaten, also 150 Tagen. Der Zeitraum vom 1. Januar bis 15. Februar 2023 entspricht 1,5 Monaten, also 45 Tagen.

Aufgabe 5:

Carl schließt ebenfalls einen Sparvertrag ab. Er zahlt am 8. November 2014 einen Betrag von 5.000 € bei der Bank ein. Die Auszahlung erfolgt am 30. Juli 2025. Berechne den Auszahlungsbetrag, wenn die Bank durchgehend einen Zins von 4% zahlt. Berechne den alternativen Auszahlungsbetrag, wenn die Bank zum 1. Januar 2019 den Zins auf 5% erhöht.

Aufgabe 6:

Johannes benötigt am 1. Juli 2030 einen Betrag von 100.000 €. Die Bank bietet ihm 5% Zins (gemischte Verzinsung). Bestimme, wieviel Johannes am 13. August 2017 anlegen muss, um den gewünschten Auszahlungsbetrag zu erhalten.



ANHANG: LÖSUNGEN DER AUFGABEN

Kapitel 1 – Zahlungsströme

Aufgabe 1:

- a) Der Zahlungsstrom hat (aus Deiner Sicht) die Form $(-5; 1; 1; 1; 1; 1)$ bei täglicher Zahlung.

	Heute	Tag 1	Tag 2	Tag 3	Tag 4	Tag 5
Zahlungsstrom	-5	1	1	1	1	1

- b) Der Zahlungsstrom hat (aus Deiner Sicht) die Form $(-5; -5; -5; -5; -5; -5; -5; -5; -5; -5; -5; -5; 60)$ bei monatlicher Zahlung. Dabei kann man das Jahresende 31. Dezember, 23:59 Uhr, mit dem 1. Januar, 0 Uhr, gleichsetzen.

	1.1.	1.2.	1.3.	1.4.	1.5.	1.6.	1.7.	1.8.	1.9.	1.10.	1.11.	1.12.	31.12. = 1.1.
Zahlungsstrom	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5	60

- c) Der Zahlungsstrom hat aus Deiner Sicht die Form (-299) .

Aufgabe 2:

- a) $(21.199; 31.099; 21.199; 21.199; 21.199)$ bei jährlicher Zahlung zum 1. Januar
- b) $(42.398; 42.398; 42.398; 42.398; 42.398)$ bei jährlicher Zahlung zum 1. Januar
- c) Erster Kredit: $(1.000; -205; -205; -205; -205; -205)$ bei monatlicher Zahlung
 Zweiter Kredit: $(3.000; -1.550; -1.550)$ bei Zahlung alle zwei Monate.
 Gesamtkredit: $(4.000; -205; -1.755; -205; -1.755; -205)$ bei monatlicher Zahlung

LÖSUNGEN ZU KAPITEL 2 – DER ZINS

Aufgabe 1:

Schuljahr	Viktor	Viktoria
1	1,00 €	1,00 €
2	2,00 €	1,50 €
3	3,00 €	2,25 €
4	4,00 €	3,38 €
5	5,00 €	5,06 €
6	6,00 €	7,59 €
7	7,00 €	11,39 €

Schuljahr	Viktor	Viktoria
8	8,00 €	17,09 €
9	9,00 €	25,63 €
10	10,00 €	38,44 €
11	11,00 €	57,67 €
12	12,00 €	86,50 €
Ggf. 13	13,00 €	129,75 €

Insgesamt hat Viktoria deutlich besser verhandelt.

Aufgabe 2:

Zahlungsstrom A und D: Lineares Wachstum

Zahlungsstrom B und C: Exponentielles Wachstum

Aufgabe 3:

Der Zahlungsstrom lautet: (20; 20; 20; ...), der Endwert beträgt 86,20 €.

Aufgabe 4:

Kontostand vor dem ersten Geschenk: 800,00 €.

Kontostand nach dem ersten Geschenk: 750,00 €.

Kontostand vor dem zweiten Geschenk: 780,00 €.

Kontostand nach dem zweiten Geschenk: 730,00 €.

Kontostand vor dem dritten Geschenk: 759,20 €.

Kontostand nach dem dritten Geschenk: 709,20 €.

Kontostand vor dem vierten Geschenk: 737,57 €.

Kontostand nach dem vierten Geschenk: 687,57 €.

Aufgabe 5:

- a) Der Zahlungsstrom aus Eriks Sicht lautet (100; 100; 100; 100) bei jährlicher Zahlungsweise, der von Onkel Christian lautet (-100; -100; -100; -100) bei jährlicher Zahlungsweise.

Aus Sicht von Erik beträgt der Barwert 377,51 €, der Endwert 424,65 €, die Werte aus Sicht von Onkel Christian sind dieselben Beträge, jeweils mit einem negativen Vorzeichen.

Beachte, dass die Werte das Zweifache der Werte im Beispiel sind und auch die Bar- und Endwerte daher jeweils doppelt so groß sind.

- b) Der Zahlungsstrom aus Eriks Sicht lautet nun (50; 50; 50; 50; 50; 50) bei jährlicher Zahlungsweise. Der Barwert ist 272,59 €, der Endwert 331,65 €.

Aufgabe 6:

Nach dem ersten Weihnachtsfest sind auf dem Konto noch 550,00 €, nach dem zweiten noch 517,00 €, nach dem dritten 473,68 € und nach dem vierten 426,63 €.

Aufgabe 7:

Der Barwert des Zahlungsstroms beträgt 220,73 €.

Aufgabe 8:

Martina muss heute 188,52 € einzahlen, um in zwei Jahren 200 € auf ihrem Konto zu haben. Wenn sie nach zwei Jahren 400 € (das Doppelte) auf dem Konto haben möchte, muss sie heute das Doppelte einzahlen, also 377,04 €.

Aufgabe 9:

Wenn K_0 der ursprüngliche Preis einer Ware in Antons Laden ist, dann beträgt er nach der Preiserhöhung $(1 + 20\%) \cdot K_0 = 1,2 \cdot K_0$. Wenn Anton die Preise danach um 20% reduziert, beträgt der Preis der Ware $0,8 \cdot 1,2 \cdot K_0 = 0,96 \cdot K_0$, also weniger als zu Beginn.

Vertiefungsaufgabe:

Wenn die Einzahlung zu Beginn der Periode stattfindet, lautet die Formel

$$K(n + 1) = q \cdot (K(n) + R(n))$$

Dabei bezeichnet der Wert $K(n + 1)$ das Kapital am Ende der Zinsperiode und unmittelbar vor der nächsten Ein- oder Auszahlung.

Bei den beiden Sichtweisen wird das eine Mal die Ein- oder Auszahlung direkt am Anfang, das andere Mal direkt am Ende der Zinsperiode dem Kapital zugeschlagen. Der Unterschied ist somit lediglich, ob der Kontostand mit oder ohne die Ein-/Auszahlung genannt wird. Für den eigentlichen Wachstumsprozess ergibt sich keine Änderung.

Mit anderen Worten: Für die Verzinsung ist es nicht relevant, ob eine Zahlung am 31. Dezember um 23:59 Uhr oder am 1. Januar um 0:00 Uhr vorgenommen wird.

LÖSUNGEN ZU KAPITEL 3 – DER ZINSESZINS

Aufgabe 1:

Der Kontostand nach 12 Jahren beträgt $1.000 \text{ €} \cdot 1,04^{12} = 1.601,03 \text{ €}$.

Aufgabe 2:

In diesem Fall beträgt der Kontostand nach 3 Jahren (12 Zinsperioden) ebenfalls:

$1.000 \text{ €} \cdot 1,04^{12} = 1.601,03 \text{ €}$.

Aufgabe 3:

Der Endstand des Kredits beträgt $10.000 \text{ €} \cdot 1,07^{10} = 19.671,51 \text{ €}$.

Josephspfund:

Bei einem Zins von 1% wäre nach 2 Jahrtausenden ein Kapital von ca. 4,4 Mio. € vorhanden. Bei einem Zins von 3% ergeben sich ca. 472,5 Trd. € (entspricht ca. 50 Billionen Tonnen Gold), bei 5% ergeben sich 23,9 Sextilliarden €, dies entspricht einer Goldmenge mit dem Gewicht von ca. 1.268.000 Sonnenmassen (!).

Exkurs:

Die tatsächliche Zeit für die Verdopplung eines Kapitals im Vergleich zur 72er-Regel (in Jahren) ist:

Zinssatz	0,5%	1,0%	2,0%	3,0%	4,0%	5,0%	7,0%	10,0%	15,0%	20,0%
Verdopplungszeit	138,98	69,66	35,00	23,45	17,67	14,21	10,24	7,27	4,96	3,80
72er-Regel	144,00	72,00	36,00	24,00	18,00	14,40	10,29	7,20	4,80	3,60

Die 72er-Regel hat sich durchgesetzt, weil 72 mehrfach durch 2 und 3 teilbar ist und somit leicht gekürzt werden kann.

Für die Zeit t , die man benötigt, um das Kapital bei einem Zins von p zu verdoppeln, gilt:

$$t \approx \frac{72}{p}$$

Dann gilt für den benötigten Zinssatz p , um ein Kapital im Zeitraum t zu verdoppeln:

$$p \approx \frac{72}{t}$$

Aufgabe 4:

An seinem 81. Geburtstag kann Marco nicht mehr den vollen Betrag von 13.000 € entnehmen. Wenn er jedes Jahr nur 6.500 € entnimmt, reicht das Geld beliebig lange (ewige Rente), in jedem Jahr wird dann im Wesentlichen der in dem Jahr erwirtschaftete Zins entnommen.

Aufgabe 5:

Barwert Angebot 1: 1.006,22 €; Barwert Angebot 2: 1.002,39 €; Barwert Angebot 3: 1.042,19 €. Damit ist das Angebot 2 das günstigste (obwohl in Summe das Angebot 1 günstiger scheint).

Anwendung: Festverzinsliche Wertpapiere

Aufgabe 6:

Zahlungsstrom (aus Sicht des Käufers): (-98; 3; 3; 103) bei Zahlung zum 1. Januar

LÖSUNGEN ZU KAPITEL 4 – BEWERTUNG VON ZAHLUNGSSTRÖMEN

Aufgabe 1:

Die Barwerte betragen:

0%: 70,00 € 1%: 68,72 € 2%: 67,49 € 4%: 65,15 €

Bei einem Zins von 0% wird die Summe der Zahlungen bestimmt.

Aufgabe 2:

Die Endwerte für die drei Alternativen der Zahlungsströme betragen:

Vorschlag 1: 100.000 € Vorschlag 2: 114.820,62 € Vorschlag 3: 139.172,12 €

Diese drei Beträge sind allerdings ohne Weiteres nicht vergleichbar, da sie jeweils zu unterschiedlichen Zeitpunkten vorliegen. Um sie vergleichbar machen zu können, muss man die erste und die zweite Alternative gedanklich verlängern, indem man Nullen an die ersten beiden Zahlungsströme anhängt. Man erhält dann:

Vorschlag 1: 142.331,18 € Vorschlag 2: 139.696,84 € Vorschlag 3: 139.172,12 €

Diese Endwerte sind zu identischen Zeitpunkten berechnet und direkt vergleichbar. Auch hier sieht man, dass der Vorschlag 3 besser ist als die beiden anderen.

Aufgabe 3:

Der Barwert BW und der Endwert EW eines Zahlungsstroms der Länge n und dem Zins p hängen folgendermaßen zusammen:

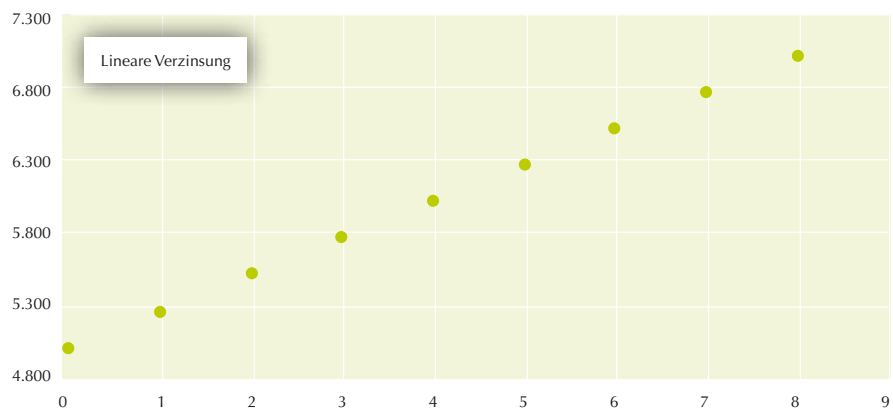
$$EW = (1 + p)^n \cdot BW$$

Mit anderen Worten: Wenn man den Barwert eines Zahlungsstroms hat, kann man den Endwert bestimmen, indem man den Barwert über die Laufzeit aufzinst.

Vertiefung: Unterjähriges Sparen, gemischte und stetige Verzinsung und die Eulersche Zahl

Aufgabe 4:

Bei linearer Verzinsung beträgt das Guthaben von Marco nach 67 Jahren lediglich 21.750,00 €.



Für denselben Endbetrag wie bei exponentieller Verzinsung benötigt Marco eine jährliche Verzinsung von etwa 37,74%.

Der fehlende Zinseszinsseffekt macht bei langen Laufzeiten einen großen Unterschied bei der Ablaufleistung.

Aufgabe 5:

Die Kontostände betragen:

am 08.11.2014	5.000,00 €
am 01.01.2015	5.028,89 € (52 Tage linear verzinst)
am 01.01.2019	5.883,09 €
am 01.01.2025	7.443,98 € (7.883,90 € nach Zinserhöhung)
am 30.07.2025	7.617,68 € (8.113,85 € nach Zinserhöhung)

Aufgabe 6:

Die benötigte Einzahlung beträgt 53.313,36 €.

Wir schaffen
neues Wissen



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.



DGVFM

DEUTSCHE GESELLSCHAFT
FÜR VERSICHERUNGS-UND
FINANZMATHEMATIK e.V.