Versicherungsmathematik in der Praxis – Band 4

Lebens-versicherungs-mathematik

Lehrmodule mit Aufgaben und Lösungen für die Sekundarstufe II

DAV
Deutsche Aktuarvereinigung e.V.

DGVFM
Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V.

Versicherungsmathematik in der Praxis –
Band 4

Lebensversicherungs-mathematik

Dr. Matthias Heß, Aktuar DAV
Natalia Löfflad, Aktuarin DAV
Prof. Dr. Annegret Weng, Aktuarin DAV

INHALTSVERZEICHNIS

* In dieser Broschüre wird kapitelweise abwechselnd die weibliche und männliche Form verwendet. Alle Aussagen des Textes gelten geschlechtsunabhängig.

1. EINLEITUNG

Zu den vorliegenden Materialien

Die vorliegende Einführung in die Lebensversicherungsmathematik ist der vierte Band einer von der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V. (DGVFM) herausgegebenen Reihe von Schulmaterialien. Er komplementiert die anderen drei Bände, von denen sich die ersten beiden – „Stochastik. Simulation von Sachschäden" und „Spätschäden in der Sachversicherung" mit Themen aus der Schadenversicherung befassen und der dritte Band „Zinsrechnung und ihre Praxisanwendungen" auf das wichtige Thema der Zinseszinsrechnung eingeht.

Dieser Band, der sich mit Lebensversicherungsmathematik befasst, ist modular aufgebaut und lässt sich deshalb sehr flexibel in den Unterricht integrieren. Er besteht aus acht Arbeitsblättern mit Lösungen, denen jeweils ein bis zwei Seiten Erläuterungen vorangehen. Die Themen können im Mathematikunterricht, einer Mathematik-AG, als Vorbereitung auf ein mathematisches Praktikum oder im Rahmen eines mathematiknahen Schülerinnenprojekts behandelt werden. Allerdings ist es auch möglich, nur ein einzelnes Arbeitsblatt, beispielsweise die Einführung, die einen Einblick in die Versicherungswirtschaft gibt, im Fach Wirtschaft zu behandeln. Für die meisten Aufgaben wird ein Taschenrechner benötigt. Diese sind durch das Symbol eines Taschenrechners gekennzeichnet. Bei einigen Aufgaben ist der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms zu empfehlen bzw. unumgänglich. Dies zeigt das Tabellensymbol an. Weitere Hinweise zur Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms für die vorliegenden Unterlagen finden sich in Anhang A.

Für einzelne Aufgaben und den Abschnitt 9 werden Kenntnisse aus der Statistik (Erwartungswert, Varianz, Normalverteilung) bzw. der Zinseszinsrechnung vorausgesetzt.

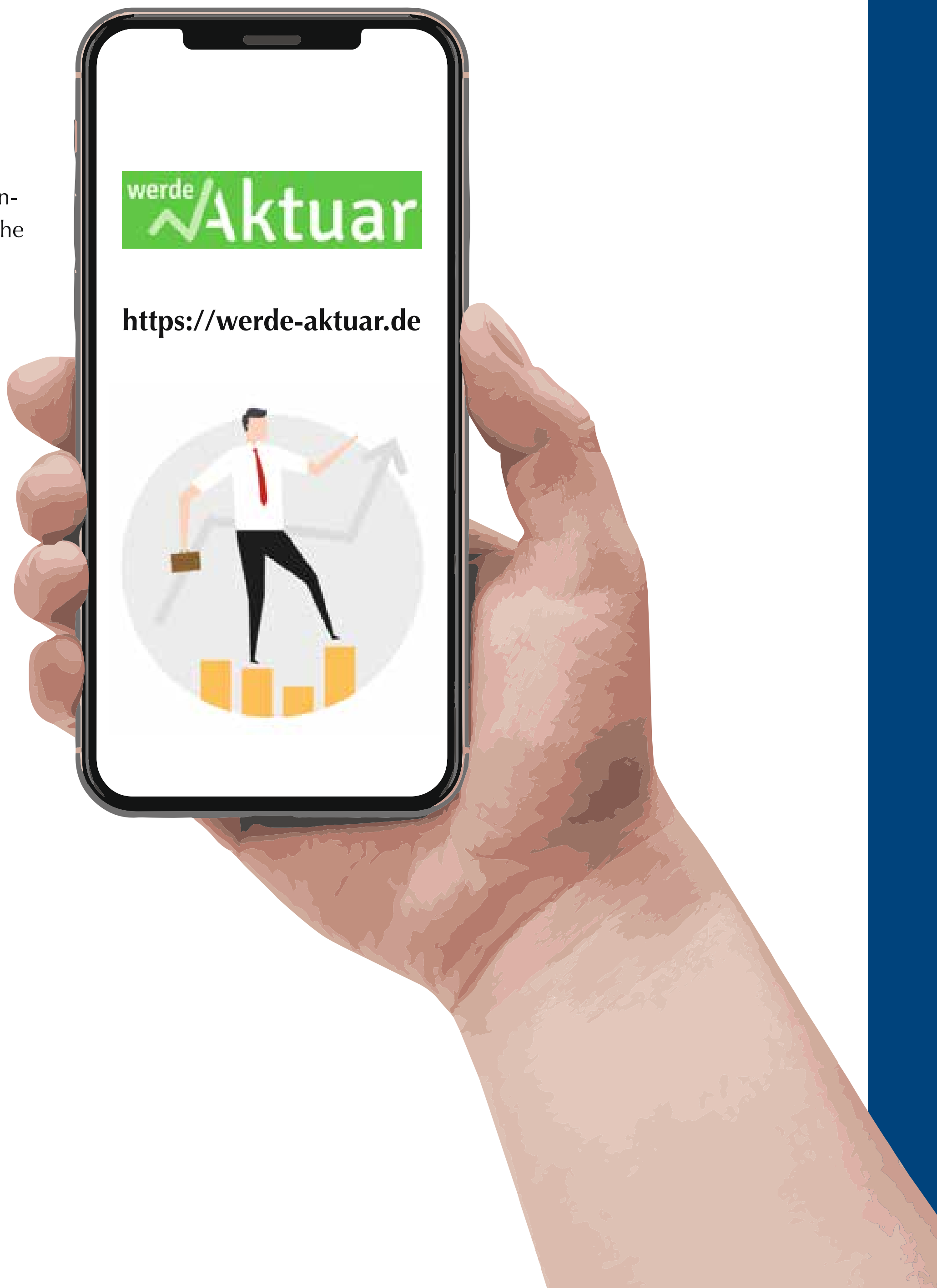
Das Berufsbild der Aktuarin, die Arbeit der DAV und DGVFM

Mathematik spielt im Versicherungswesen eine zentrale Rolle. Mathematikerinnen entwickeln und kalkulieren Tarife, sie sind im Controlling, im Rechnungswesen, im Kapitalanlagebereich, in der Datenanalyse und in der Risikomessung beschäftigt. Mit ihrer Expertise stellen sie sicher, dass die abgeschlossenen Versicherungsverträge auch bei sehr langen Laufzeiten von 30, 50, 70 oder sogar noch mehr Jahren, wie sie im Bereich der Altersvorsorge üblich sind, immer erfüllt werden können.

Für das spätere Berufsleben als Aktuarin bietet ein Studium der (Wirtschafts-)Mathematik grundsätzlich eine hervorragende Basis. Um nach Abschluss des Studiums die für die tägliche Arbeit notwendigen Kenntnisse zu erlangen, besteht zudem die Möglichkeit, eine berufsbegleitende Ausbildung zur Aktuarin bei der Deutschen Aktuarvereinigung e.V. (DAV) zu absolvieren. Die Ausbildung dauert in der Regel drei bis vier Jahre und vermittelt ein umfassendes Wissen in der Versicherungs- und Finanzmathematik.

Weitere Informationen findet man unter:
https://werde-aktuar.de

Für die Förderung der aktuariellen Wissenschaft setzt sich insbesondere die Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V. (DGVFM) ein.
Die vorliegenden Materialien sind im Rahmen der Arbeitsgruppe Schule der DGVFM entstanden.



Mathematik in der Lebensversicherung – zwei Fallstudien

Fallstudie 1:
Markus freut sich – es sind nur noch wenige Wochen, bis seine Familie in das schöne neue Haus zieht. Endlich hat er ein Zimmer ganz für sich allein.

Heute kam ein dicker Brief von einer Lebensversicherung. Seine Eltern haben sich gleich in die Lektüre des Briefes vertieft. Er hört sie über „Risikolebensversicherung" sprechen und ist irritiert. Ausgerechnet seine Eltern, die nie Risiken eingehen, wollen jetzt ein riskantes Leben führen?

Sein Vater erklärt ihm, dass es nicht darum geht, etwas zu riskieren, sondern darum, sich gegen Risiken abzusichern. Für den Hauskauf mussten sie nämlich einen Kredit von 300.000 € aufnehmen – eine stolze Summe, die deutlich über dem liegt, was seine Eltern im Jahr verdienen. Um diesen Kredit abzuzahlen, müssen sie jeden Monat einen hohen Betrag an die Bank überweisen. Wenn einem seiner Eltern etwas zustößt, kann die Familie sich die Kreditraten nicht mehr leisten. Das ist ein Risiko, und damit sie in so einem Fall das Haus nicht verlieren, schließt jeder von seinen Eltern eine sogenannte Risikolebensversicherung ab, die im Todesfall zahlt.

„Aber müssen wir dann nicht zweimal 300.000 € zahlen, einmal an die Bank und einmal an die Versicherung?", fragt Markus.

„Nein", erklärt Markus' Vater, „für jede der beiden Risikolebensversicherungen zahlen wir nur etwa 400 € im Jahr, aber wenn einer von uns Eltern stirbt, zahlt die Versicherung 300.000 €".

Markus stellt fest, dass die Versicherung mehr als das 70-Fache davon zahlen würde, was sie eingenommen hat. Wie kann es sein, dass sich das Geschäft für die Versicherung trotzdem lohnt?

Das hat mit Mathematik zu tun. In jeder Versicherung arbeiten Aktuarinnen (=Versicherungsmathematikerinnen), die die Preise genau berechnen. In diesem Heft lernen wir, welche verschiedenen Arten von Lebensversicherungen es gibt und wie man einige davon kalkuliert.

Fallstudie 2:

Herr Schmidt hat in seiner Jugend einen Handwerksberuf gelernt. Nach seiner Meisterprüfung machte er sich mit einem eigenen Betrieb selbständig. Seitdem lief das Geschäft recht gut, heute hat sein Betrieb viele Kundinnen und zehn Mitarbeiterinnen.

Herr Schmidt ist nun 65 Jahre alt und möchte in den Ruhestand gehen. Er beschließt, den gut laufenden Betrieb zu verkaufen. Damit würde Herrn Schmidt nun auf einen Schlag ein erheblicher Geldbetrag zur Verfügung stehen, aber da er dann nicht mehr arbeitet, muss dieser Betrag für den Rest seines Lebens reichen. Doch wie viele Jahre lebt er noch?

Herr Schmidt recherchiert im Internet und stößt auf die Seite „www.wie-alt-werde-ich.de". Dort gibt er sein Alter, seine Lebensgewohnheiten und ein paar andere Daten ein. Anhand seiner Eingaben errechnet die Seite seine restliche Lebenserwartung. Demnach hat er noch 20 Jahre vor sich, also muss der aus dem Verkauf erlöste Betrag mindestens für 20 Jahre reichen. Eine solche Lebenserwartung ist allerdings keine exakte Prognose für einen einzelnen Menschen, sondern nur ein Erwartungswert auf Basis bisheriger Beobachtungen. Genauso könnte Herr Schmidt auch 95 Jahre alt werden, also noch 30 weitere Jahre leben. Deshalb ist es nicht ausreichend, lediglich seinen Unterhalt für 20 weitere Lebensjahre zu finanzieren.

In einem solchen Fall bietet es sich an, eine private Rentenversicherung abzuschließen. Diese zahlt ihm eine festgelegte monatliche Rente bis zu seinem Lebensende, unabhängig davon wie alt er wird. Doch wie wird dieser monatliche Betrag errechnet, wo doch noch gar nicht feststeht, wie lange er gezahlt werden soll? Wie man das kalkuliert und welche Vorteile eine Rentenversicherung bietet, lernen wir in diesem Heft.

2. EINFÜHRUNG IN DIE LEBENSVERSICHERUNG

Erläuterungen

Versicherungsunternehmen übernehmen die Verpflichtung für zukünftige, ungewisse Zahlungen gegen einen festen Beitrag. Damit machen sie die Zukunft der Versicherungsnehmer planbar. So müssen sie den finanziellen Ruin durch unglückliche Umstände wie etwa einen Unfall, ein Feuer, eine Krankheit oder den Tod eines Angehörigen nicht mehr fürchten. Hier hilft die Mathematik durch das Gesetz der Großen Zahlen: Bei einem hinreichend großen Bestand an Versicherungsnehmern ist immer nur ein kleiner Teil durch ein ungünstiges Ereignis betroffen. Risiken sind nur versicherbar, wenn diese Grundannahme erfüllt ist.

Die Existenz von Versicherungsunternehmen ist in einer modernen Gesellschaft unerlässlich, um sozialen Frieden und Wachstum zu gewährleisten.

Ohne Krankenversicherung wären Arztbesuche oder eine Behandlung im Krankenhaus für die meisten Menschen zu teuer. Ohne Rentenversicherung müssten die Menschen im Alter von ihren Ersparnissen leben und wären, wenn diese aufgebraucht sind, auf Unterstützung anderer angewiesen.

Nach Definition ist ein Versicherungsvertrag ein Vertrag, der das Versicherungsunternehmen verpflichtet, gegen Erhalt eines zuvor fälligen Geldbetrags (den Beitrag, auch Prämie genannt) bei Eintritt eines im Vertrag festgelegten, zufälligen (und somit ungewissen) Ereignisses Zahlungen an den Versicherungsnehmer zu leisten. Diese hängen in der Höhe vom Ereignis ab und sollen den daraus resultierenden, wirtschaftlichen Schaden des Versicherungsnehmers dämpfen bzw. ganz ausgleichen.

In Deutschland unterscheidet man die verpflichtende Sozialversicherung und die freiwillige Individual- bzw. Privatversicherung. Im Gegensatz zur Sozialversicherung beruht die Privatversicherung auf dem versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzip. Die Privatversicherung lässt sich in Lebens-, Kranken- und Schadenversicherung unterteilen.

Diese Broschüre beschäftigt sich mit dem wichtigen Thema der privaten Lebensversicherung, die in Deutschland mit jährlichen Beitragseinnahmen von etwa 100 Mrd. € und mit Rückstellungen in Höhe von 1 Billion € zu den größten institutionellen Kapitalanlegern gehört.

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in das Thema Versicherung mit speziellem Fokus auf der Lebensversicherung. Die Lebensversicherung umfasst nicht nur die klassische Risikolebensversicherung (Zahlung erfolgt im Falle des Todes an die Angehörigen), sondern eine große Bandbreite von Tarifen, wie z. B.

- die kapitalbildende Lebensversicherung: zahlt die Versicherungssumme im Falle eines Todes während der Laufzeit oder bei Erleben am Ende der Laufzeit;
- die sofort beginnende, lebenslange oder zeitlich begrenzte Rente: zahlt, solange der Versicherungsnehmer lebt, aber bei zeitlicher Begrenzung maximal bis zum Versicherungsende in gewissen Zeitabständen – meist monatlich oder jährlich – eine Rente;
- die aufgeschobene Rente: Rentenzahlungen werden erst etliche Jahre nach Versicherungsbeginn fällig, in der Ansparphase davor werden vom Versicherungsnehmer Beiträge entrichtet;
- die Ausbildungsversicherung: zahlt eine zeitlich befristete Rente während der Ausbildung und übernimmt die Ausbildungskosten, wenn ein Elternteil vorzeitig verstirbt;
- die Berufsunfähigkeitsversicherung: zahlt, wenn es aus gesundheitlichen Gründen nicht mehr möglich ist, den eigenen Beruf auszuüben.

Hinter der Kalkulation steckt eine Menge Mathematik, denn Versicherungen beruhen auf dem Gesetz der Großen Zahlen: Wenn wir einen großen Bestand von Risiken haben, die alle identisch verteilt und unabhängig sind, dann ist die relative Häufigkeit der beobachteten Schadensfälle eine gute Approximation für die theoretische Schadenswahrscheinlichkeit. Dies gilt aber nur, wenn die Anzahl der Risiken n gegen unendlich konvergiert, also wenn der Bestand hinreichend groß ist.

In 2022 haben die deutschen Versicherer 224 Milliarden € eingenommen und Leistungen von 183 Milliarden € ausgezahlt. Davon entfielen auf die Lebensversicherung Einnahmen von 97 Milliarden € und Leistungen von 90 Milliarden € – also jeweils fast die Hälfte. Damit hat die Lebensversicherung von allen Versicherungssparten in Deutschland das größte Volumen und ist von erheblicher Bedeutung für die deutsche Volkswirtschaft.*

**) Laut Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e.V. (GDV)*

ARBEITSBLATT: EINFÜHRUNG IN DIE LEBENSVERSICHERUNG

Aufgabe 1:

In Deutschland unterscheidet man grob drei Versicherungszweige: die Schaden-/Unfallversicherung, die private Krankenversicherung und die Lebensversicherung. Gib an, von welchen Versicherungen du schon gehört hast, und versuche sie den drei Zweigen zuzuordnen. Welche der Versicherungen ist dem Versicherungszweig „Leben“ zuzurechnen?

Aufgabe 2:

Im Folgenden konzentrieren wir uns auf die Tarife der Lebensversicherung. Erläutere, welcher ökonomische Schaden im Falle einer Risikolebensversicherung, einer Rentenversicherung und einer Ausbildungsversicherung gedeckt wird.

Aufgabe 3:

Lea Müller hat im Jahr 2020 eine Versicherung abgeschlossen. Wann werden bei den einzelnen Versicherungsarten Zahlungen fällig? Ergänze die Tabelle:

	Tod 2030	Tod 2045	Tod 2060
Risikolebensversicherung (Laufzeit 15 Jahre)	2030		
Kapitalbildende Lebensversicherung (Laufzeit 30 Jahre)		2045	
Sofortbeginnende lebenslange Rentenversicherung	2020-2030		
Um 30 Jahre aufgeschobene, lebenslange Rentenversicherung		-	

Aufgabe 4:

Jeanne Louise Calment, die im Jahr 1997 im Alter von 122 Jahren verstarb, hält den Weltrekord des höchsten erreichten Lebensalters eines Menschen. Im Alter von 90 Jahren schloss sie mit dem Rechtsanwalt Andre-François Raffray einen Vertrag ab, der für diesen bzw. dessen Angehörige sehr nachteilig endete. Recherchiere im Internet über diese Geschichte und erkläre, warum der Vertrag Raffray zum Verhängnis wurde und warum eine Versicherung mit solchen Verträgen kein Problem hat.

Erläuterungen

Kern der Kalkulation von Prämien, Rückstellungen und Leistungen in der Lebensversicherungsmathematik ist die Bewertung und Verrechnung verschiedener künftiger Zahlungen, z. B. einer Renten- oder einer Prämienzahlung. Dies bedeutet, dass der (evtl. zukünftig zu leistenden) Zahlung einer Geldsumme ein Wert zum aktuellen Zeitpunkt zugeordnet wird. Eine einfache Idee wäre es, den Wert der Zahlung gleich ihrem nominellen Betrag zu setzen: Eine Zahlung von 100 € würde mit 100 € bewertet werden, egal zu welchem Zeitpunkt sie stattfindet. Diese Art der Bewertung unterstellt, dass der heutige Wert einer zukünftigen Zahlung dem Zahlbetrag zum späteren Zeitpunkt entspricht. Unterstellt man jedoch beispielsweise, dass eine zukünftige Zahlung nur unter gewissen Bedingungen geleistet wird oder für die zukünftige Zahlung vorgehaltene Finanzmittel verzinslich angelegt werden, so ist diese Annahme eine unzulässige Vereinfachung.

Der Barwert stellt den heutigen Wert einer zukünftigen Zahlung dar. Hängt dieser nur vom Zinssatz ab, spricht man von einem finanzmathematischen Barwert. Finanzmathematische Barwerte werden auch in der Broschüre „Zinsrechnung und ihre Praxisanwendungen“ vorgestellt. In der Lebensversicherung werden in der Regel versicherungsmathematische Barwerte verwendet, die zusätzlich von künftigen, unsicheren Ereignissen abhängen.

Ein einfaches Beispiel zeigt die Komplexität der Bewertung einer zukünftigen Zahlung auf: Antonia verspricht Benedikt die Zahlung einer Geldsumme, z. B. 100 €. Wird diese Zahlung sofort geleistet, so beträgt ihr Wert tatsächlich exakt 100 €. Soll die Zahlung dagegen erst in einem Jahr geleistet werden, so sind verschiedene Aspekte zusätzlich zu betrachten. So könnte Benedikt sagen: „Da ich das Geld nicht sofort, sondern erst in einem Jahr erhalten werde, entgeht mir die Möglichkeit, es verzinslich anzulegen. Der Wert heute muss also geringer sein, und zwar um so viel, dass er zusammen mit dem entgangenen Zinsgewinn gerade 100 EUR ergibt.“ Ebenso kann man die Frage stellen, was der Wert von Antonias Versprechen ist, wenn sie vor Ablauf des Jahres und damit vor der fälligen Zahlung der Geldsumme verstirbt. Beide Argumente sprechen dafür, dass der heutige Wert der zukünftigen Zahlung geringer ist als die zu zahlende Geldsumme, also weniger als 100 €. Allerdings könnte auch Antonia für sich beanspruchen, mit der Verwahrung des Geldes für ein Jahr eine zusätzliche Leistung gegenüber Benedikt zu erbringen. Diese zusätzliche Leistung würde den Wert der zukünftigen Zahlung erhöhen; ihr Wert wäre größer als 100 €.

In der Finanz- und Versicherungsmathematik werden im Allgemeinen nicht einmalige künftige Zahlungen, sondern Zahlungsströme betrachtet. Ein Zahlungsstrom c ist definiert als Vektor $c = (c_1, \dots, c_n)$, dessen Einträge Zahlungen c_j zum Zeitpunkt j darstellen. Beispiele für Zahlungen im Kontext der Lebensversicherung wären z. B. Prämienzahlungen, Todesfallleistungen oder Rentenzahlungen.

Die einfachste Form der Bewertung $W(c)$ eines Zahlungsstromes c ist die Summe gegeben durch

$$W(c) = c_1 + \dots + c_n$$

Diese Art der Bewertung unterstellt, dass jede einzelne Zahlung gleich ihrem Nominalbetrag ist. Durch mögliche Verzinsungen, unsichere Ereignisse (z.B. Tod einer Geschäftspartnerin) oder Kosten der Geschäftstätigkeit weicht diese Bewertung von der Realität ab. Um einen Zahlungsstrom realistisch zu bewerten muss man noch weitere Argumente heranziehen.

Die für die Lebensversicherung wichtigsten Rechnungsgrundlagen sind Verzinsung, Kosten der Geschäftstätigkeit und die Sterbewahrscheinlichkeiten in den Sterbetafeln.

Annahmen, die die Bewertung eines Zahlungsstromes von der einfachen Summenbildung abweichen lassen, nennt man in der Versicherungsmathematik **Rechnungsgrundlagen**. Das folgende Arbeitsblatt soll anhand einfacher Beispiele verschiedene Rechnungsgrundlagen erläutern und deren Wirkung auf den heutigen Wert einer zukünftigen Zahlung verdeutlichen.

Beispiel: Bettina vereinbart mit 1.000 verschiedenen Personen, gegen Zahlung eines bestimmten Geldbetrags in 5 Jahren je 100 € an sie auszuzahlen. Am Ende der Frist zahlt Bettina die 100€ nur an die jeweilige Person aus, wenn diese noch lebt; sonst behält sie das Geld. Sie weiß, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit in jedem Jahr 20 ihrer Geschäftspartnerinnen sterben. Welchen Betrag muss Bettina zu Beginn von jeder ihrer 1.000 Geschäftspartnerinnen verlangen?

Es wird erwartet, dass in den nächsten 5 Jahren 5 * 20 = 100 Geschäftspartnerinnen von Bettina sterben, so dass nur noch 900 das Geld bekämen. Verlangt sie am Anfang je 90 € von den 1.000 Personen, hätte sie in diesem Fall genug Geld, alle zu bezahlen. Es kann aber auch sein, dass am Ende nur noch 850 der Geschäftspartnerinnen leben; genauso können es noch 950 sein. Bettina kann daher keinen exakten Betrag ausrechnen, sondern muss mit einer Schätzung arbeiten. Verlangt sie 100 € von jeder der Geschäftspartnerinnen, dann hat sie mit höchster Wahrscheinlichkeit am Ende Geld übrig. Verlangt sie 90 € von jeder; dann würde Bettina immer dann, wenn mehr als 900 ihrer Geschäftspartnerinnen die 5 Jahre überleben, einen Verlust machen, da sie nicht genug Geld zur Verfügung hätte, um alle auszuzahlen. Angemessen wäre deshalb, einen Betrag zwischen 90 € und 100 € zu verlangen. Dann wird Bettina mit hoher Wahrscheinlichkeit einen Gewinn erzielen; dies kompensiert sie aber für das Risiko, in wenigen Fällen auf einem Verlust sitzen zu bleiben. Je näher der Betrag an den 100 € liegt, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn (und entsprechend niedriger diejenige für einen Verlust!). Der Anteil des Betrags, der über die erwarteten 90 € hinausgeht, stellt für Bettina einen Sicherheitspuffer dar.

ARBEITSBLATT: RECHNUNGSGRUNDLAGEN

Aufgabe 1:

Antonia schließt mit Bettina folgende Vereinbarung: Antonia gibt Bettina einen bestimmten Geldbetrag; dafür verpflichtet sich Bettina, in 5 Jahren 100 € an Antonia zu zahlen. Welchen Betrag sollte Bettina von Antonia mindestens verlangen, wenn

a) Bettina das von Antonia gezahlte Geld bis zur Zahlung der 100 € in 5 Jahren in einem gebührenfreien Schließfach aufbewahrt?

b) Bettina das von Antonia gezahlte Geld bis zur Zahlung der 100 € in 5 Jahren in einem Schließfach aufbewahrt, für das sie selbst jährlich 1 € Gebühren zahlen muss?

c) Bettina das von Antonia gezahlte Geld auf ein gebührenfreies Sparbuch einzahlt, auf welchem das Guthaben jährlich mit 1% verzinst wird? (Alternative, vereinfachte Variante: Das Guthaben erhält jährlich 1 € Zinsen.)

Aufgabe 2:

Bettina bietet das obige Geschäft in Variante a) (also Aufbewahrung des Geldes in einem gebührenfreien Schließfach) nicht nur Antonia an, sondern 1.000 verschiedenen Personen. Zusätzlich gilt nun die Bedingung, dass Bettina die 100 € am Ende der 5 Jahre nur an die jeweilige Person auszahlen muss, wenn diese noch lebt; anderenfalls darf Bettina das am Anfang eingezahlte Geld behalten. Welchen Betrag muss Bettina von jeder ihrer 1.000 Geschäftspartnerinnen verlangen, wenn

a) sie davon ausgeht, dass niemand ihrer 1.000 Geschäftspartnerinnen in den nächsten 5 Jahren sterben wird?

b) sie weiß, dass in jedem Jahr genau 20 ihrer 1.000 Geschäftspartnerinnen sterben werden?

Aufgabe 3*:

Betrachte wiederum das Geschäft aus Aufgabe 2. Angenommen, für jede der 1.000 Geschäftspartnerinnen von Bettina besteht die Wahrscheinlichkeit von 90%, das Ende des 5-Jahreszeitraumes zu überleben.

a) Wie ist die Anzahl der nach 5 Jahren noch lebenden Geschäftspartnerinnen (also derjenigen, an die Bettina eine Zahlung wird leisten müssen) verteilt?

b) Gib eine Normalverteilung an, welche die Verteilung aus a) möglichst gut approximiert.

c) Bestimme mit Hilfe der Verteilung aus b) einen Wert für den zu Anfang von den Geschäftspartnerinnen von Bettina zur Verfügung zu stellenden Betrag, sodass Bettina nach 5 Jahren mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% die Ansprüche der noch lebenden Geschäftspartnerinnen aus dem eingesammelten Geld bedienen kann.

* Diese Aufgabe setzt die Kenntnis der Binomial- und Normalverteilung voraus.

4. STERBETAFELN

Für die Prämienberechnung wird mit Sterbetafeln gerechnet, die besonders vorsichtig sind. Man nennt diese auch Sterbetafeln 1. Ordnung, im Gegensatz zu Sterbetafeln 2. Ordnung, die die tatsächlich beobachteten Sterbewahrscheinlichkeiten enthalten. Die Unternehmen sind gesetzlich verpflichtet, ihre Tarife vorsichtig zu kalkulieren, damit sie dem Kunden am Ende in jedem Fall die versprochene Leistung auszahlen können.

Erläuterungen

Aus den Sterbetafeln lassen sich die einjährigen Sterblichkeiten ablesen. Unter der einjährigen Sterblichkeit q_x versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass ein x-Jähriger im nächsten Jahr – noch vor Erreichen des Alters $x + 1$ – verstirbt. Dabei wird stets zumindest nach dem Alter x unterschieden, häufig finden noch weitere Merkmale, wie etwa das Geschlecht, das Geburtsjahr oder das Rauchverhalten Berücksichtigung. Die Sterbetafeln werden durch statistische Methoden aus vorliegenden, in der Vergangenheit beobachteten Sterblichkeiten abgeleitet. Dabei ziehen die Versicherungsunternehmen im Allgemeinen neben Bevölkerungsdaten vom statistischen Bundesamt auch unternehmensindividuelle oder branchenweite Auswertungen hinzu. Aus den Daten ergeben sich zunächst Rohsterblichkeiten, die aufgrund zufallsbedingter Abweichungen noch geglättet werden müssen.

Für die Kalkulation der Versicherungsprodukte werden Sterbetafeln mit vorsichtigen Sterblichkeitsannahmen verwendet. Für Risikolebensversicherung bedeutet dies beispielsweise, dass die Sterblichkeiten in den zur Kalkulation verwendeten Tafeln höher als in Wirklichkeit sind. Die geglätteten Rohsterblichkeiten werden also mit Sicherheitszuschlägen versehen.

Bei Rententarifen ist es dagegen notwendig, die steigende Lebenserwartung zu berücksichtigen. Diese drückt sich in sinkenden Sterblichkeiten aus. Deshalb wird bei Sterbetafeln für Rentenversicherungen nicht nur nach dem Alter, sondern auch nach dem Geburtsjahr unterschieden. Das bedeutet, dass für einen heute 60-Jährigen eine andere Sterbetafel als für einen 60-Jährigen vor 10 Jahren verwendet wird.

Zudem ist zu beachten, dass Kunden von Versicherungsunternehmen im Allgemeinen andere Sterblichkeiten als die Gesamtbevölkerung aufweisen. So haben Bevölkerungsgruppen, die sich eine private Altersvorsorge leisten können, meist eine höhere Lebenserwartung als der Durchschnittsbürger. All diese Aspekte müssen von den Versicherungsunternehmen beachtet werden und fließen bei der Erstellung einer Sterbetafel ein.

Wir verwenden in diesem Kapitel die von der Deutschen Aktuarvereinigung entwickelte, allgemein anerkannte Tafel DAV 2008 T (siehe Anhang B), die von den meisten Versicherungsunternehmen eingesetzt wird. Diese wurde speziell für todesfallorientierte Tarife, d. h. für Tarife, bei denen das Risiko darin besteht, dass der Versicherungsnehmer stirbt, entwickelt. Den Berechnungen auf dem Arbeitsblatt liegt die Tafel 1. Ordnung (geschlechter-gemischt) zugrunde. Aus den einjährigen Sterblichkeiten q_x lässt sich beispielsweise die n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit ableiten:

$$ {}_np_x = (1 - q_x)(1 - q_{x+1}) \cdot \ldots \cdot (1 - q_{x+n-1}) $$

Beispiel: Um die 2-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit für einen 65-Jährigen zu berechnen, setzen wir folgende Werte in die obige Formel ein: $n = 2$, $x = 65$ und aus der Sterbetafel $q_{65} = 0{,}014429$ und $q_{66} = 0{,}016514$. Damit erhalten wir

$$_2p_{65} = (1 - 0{,}014429)(1 - 0{,}016514) \approx 0{,}969 = 96{,}9\%$$

Dies bedeutet, dass etwa 97% der 65-Jährigen auch das Alter 67 erreichen.

Sterbetafeln haben ein Höchstalter, das laut Tafel maximal erreichbare Alter, dies wird als ω bezeichnet. Bei unserer Tafel ist es 120. In diesem Alter ist die Sterbewahrscheinlichkeit 100%, das Alter 121 kann demnach nicht mehr erreicht werden. Ist man 120 Jahre alt, so lebt man statistisch gesehen nur noch ein halbes Jahr. Davon ausgehend kann man rückwärts gerechnet die Lebenserwartung e_x in einem beliebigen Alter x wie folgt berechnen

$$e_\omega = \frac{1}{2} \text{ und } e_x = \frac{1}{2} q_x + (e_{x+1} + 1)(1 - q_x) \text{ für alle } x < \omega$$

Diese Formel wird auch auf dem Aufgabenblatt verwendet.

Beispiel: Für $x = 119$ erhalten wir mit $q_{119} = 0{,}993782$

$$e_{119} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}993782 + (0{,}5 + 1)(1 - 0{,}993782) = 0{,}506218 \approx 0{,}51 \text{ Jahre.}$$

Und für $x = 118$ erhalten mit $q_{118} = 0{,}971181$

$$e_{118} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}971181 + (0{,}506218 + 1)(1 - 0{,}971181) = 0{,}5289982 \approx 0{,}53 \text{ Jahre.}$$

Um die Berechnungen zu vereinfachen, werden bei der Entwicklung der Tafeln neben einjährigen Sterblichkeiten auch noch andere Hilfsgrößen eingeführt. In der beigelegten Sterbetafel ist auch die sogenannte Anzahl der Lebenden L_x mit angegeben. Man stellt sich vor, man habe einen Bestand von $L_0 = 1.000.000$ Neugeborenen, den man über die Jahre hinweg beobachtet. Dieser Bestand verkleinert sich jedes Jahr um die Todesfälle des Jahres, bis am Ende niemand mehr übrig ist. Die Anzahl der Lebenden eines bestimmten Alters x wird in diesem Bestand mit L_x bezeichnet. Die Anzahl L_x ergibt sich aus $L_0 = 1.000.000$ und der Formel

$$L_{(x+1)} = (1 - q_x) L_x$$

ARBEITSBLATT: STERBETAFELN

Für die Kalkulation und das Management von Lebensversicherungsprodukten ist es erforderlich, die Sterblichkeiten zu berücksichtigen. Dafür erstellen die Unternehmen sogenannte Sterbetafeln, die sich durch statistische Methoden aus den in der Vergangenheit beobachteten Sterblichkeiten ableiten. Dieses Arbeitsblatt beschäftigt sich mit dem Umgang mit einer Sterbetafel. Aus den dort angegebenen Sterblichkeiten lassen sich beispielsweise auch Lebenserwartungen ableiten.

Aufgabe 1:

Eine Sterbetafel enthält die Wahrscheinlichkeit q_x, dass ein heute x-Jähriger im folgenden Jahr stirbt. Warum ist es sinnvoll, die Sterblichkeiten vom Alter abhängig anzugeben? Wie erhalten wir aus den Sterbetafeln die Wahrscheinlichkeit, dass

a) ein heute x-Jähriger das nächste Jahr überlebt,

b) ein heute x-Jähriger die nächsten fünf Jahre überlebt?

Aufgabe 2:

Eine Sterbetafel, die tatsächlich von Versicherungen eingesetzt wird, ist die Tafel DAV 2008 T. Im Anhang B findet sich eine daraus abgeleitete Sterbetafel für die Risikolebensversicherung. Berechne mit Hilfe der dort angegebenen einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten

a) die Wahrscheinlichkeit, dass ein heute 52-Jähriger das Alter 54 erreicht,

b) dass ein heute 52-Jähriger im Alter von 55 verstirbt?

Einfacher geht dies, wenn wir ein fiktives Kollektiv unterstellen, wie es in der Spalte L_x vorgegeben ist. Wir starten mit L_0 = 1.000.000 und verfolgen dann den Verlauf, der sich aus den, in der Tafel vorgegebenen, Sterblichkeiten ergibt. Rechne so das Ergebnis aus a) und b) nach.

Aufgabe 3:

Die Excelmappe, die begleitend zu den Schulmateralien unter https://werde-aktuar.de/für-lehrende/schule abgelegt ist, enthält die Sterbetafel DAV 2008 T, die auch im Anhang B zu finden ist. Sei $\omega = 120$ das maximal erreichbare Alter. Berechne daraus in Excel die restliche durchschnittliche Lebenserwartung eines 5-Jährigen und eines 30-Jährigen nach der Formel

$$e_w = \frac{1}{2} \text{ und } e_x = \frac{1}{2} q_x + (e_{x+1} + 1)(1 - q_x)$$

Begründe, warum die vorgegebene Formel eine Approximation für die restliche Lebenserwartung ist.

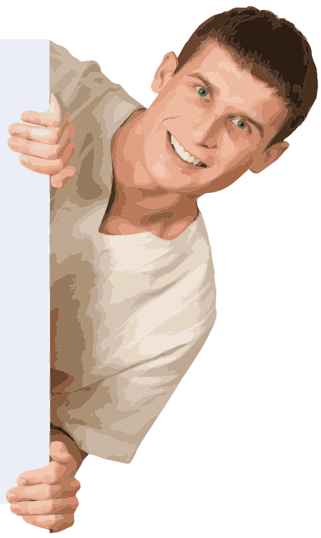
Aufgabe 4:

Versicherungen müssen ihre Produkte vorsichtig kalkulieren. Zu diesem Zweck werden bei Risikolebensversicherungen auf die ermittelten Sterblichkeiten Sicherheitszuschläge aufgeschlagen. Erläutere, warum diese Vorgehensweise sinnvoll ist. Was muss man bei einer Sterbetafel machen, die für eine Rentenversicherung verwendet wird?

RISIKOLEBENSVERSICHERUNG 5.

Erläuterungen

In manchen Lebenssituationen (z. B. Aufnahme eines Baukredits, Gründung eines Unternehmens) ist es sinnvoll, sich und seine Angehörigen gegen die finanziellen Risiken eines Todesfalls abzusichern. Eine ***Risikolebensversicherung*** *ist eine Versicherung, die im Falle des Todes der versicherten Person den im Vertrag begünstigten Personen die vereinbarte (Versicherungs-)Summe auszahlt. Während der vereinbarten Vertragslaufzeit einer Risikolebensversicherung zahlt die Versicherungsnehmerin an den Versicherer einen einmaligen Beitrag gleich zu Beginn oder regelmäßige Beiträge (z. B. monatlich). Wenn die versicherte Person während der Versicherungsdauer stirbt, wird einmalig die vereinbarte Versicherungssumme ausgezahlt.*



Die Höhe der Versicherungsbeiträge errechnet sich anhand verschiedener Kriterien, die das Risiko einer Zahlung beeinflussen können. Die wichtigsten Kriterien sind unter anderem:

- Alter der versicherten Person zu Beginn
- Vertragslaufzeit
- Höhe der Versicherungssumme

Die Versicherungsdauer sei auf n Jahre beschränkt, d. h. die Versicherungssumme wird nur bei Tod innerhalb der ersten n Jahre gezahlt. Die Prämie für eine Risikolebensversicherung wird nach dem **versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzip** berechnet, was heißt, dass der Erwartungswert der Prämien dem Erwartungswert der Leistungen entspricht.

Das versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip fordert, dass der heutige Wert von künftigen Prämienzahlungen dem heutigen Wert von künftigen Leistungszahlungen (inklusive anfallender Kosten) entsprechen muss. Nicht zulässig ist es dagegen Gewinne, wie z.B. im Einzelhandel, einzurechnen.

Zunächst betrachten wir nur Versicherungen gegen Einmalzahlung, die zu Beginn der Versicherungsdauer fällig wird.

Für die Prämienkalkulation verwenden die Versicherungsgesellschaften vorsichtige Rechnungsgrundlagen*, in denen bereits ein Risikoaufschlag einkalkuliert ist. Diese werden mit „Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung“ bezeichnet, an die auch wir uns bei den Aufgaben halten. Aus vorhergehenden Kapiteln wissen wir, dass die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person innerhalb eines Jahres stirbt, mit q_x bezeichnet wird. Dementsprechend ist $(1 - q_x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person ein Jahr überlebt, d. h. das Alter $x + 1$ erreicht. Mit L_x als Anzahl der x-jährigen Lebenden in einem geschlossenen Bestand kann man diese Wahrscheinlichkeiten auch wie folgt berechnen (vgl. Kapitel 4):

$$q_x = \frac{(L_x - L_{x+1})}{L_x} \text{ und } (1 - q_x) = \frac{L_{x+1}}{L_x}$$

* Zur Vereinfachung rechnen wir zunächst ohne Verzinsung. In Kapitel 9 wird zusätzlich der Verzinsungseffekt berücksichtigt.

Betrachten wir zunächst eine einjährige Risikolebensversicherung mit einer Versicherungsdauer von einem Jahr und einer Versicherungssumme *V* für eine *x*-jährige Versicherte. Die Leistung wird dann gezahlt, wenn die versicherte Person im Laufe dieses Jahres verstirbt, demnach entspricht der Erwartungswert der Leistung der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeit, multipliziert mit der Versicherungssumme:

$$E(L) = q_x \cdot V = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x} \cdot V$$

Beträgt die Versicherungsdauer zwei Jahre, so kommt es in folgenden Fällen zur Auszahlung der Todesfallleistung: Entweder die versicherte Person stirbt im ersten Versicherungsjahr oder sie überlebt das erste und stirbt im zweiten Jahr. Demnach berechnet sich der Erwartungswert der Leistung wie folgt:

$$E(L) = q_x \cdot V + (1 - q_x)q_{x+1} \cdot V$$

$$= \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x} \cdot V + \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_{x+1}} \cdot V$$

$$= \left(\frac{L_x - L_{x+1} + L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x}\right) \cdot V = \left(\frac{L_x - L_{x+2}}{L_x}\right) \cdot V$$

Beispiel: Schließt eine 65-Jährige eine 2-jährige Risikolebensversicherung mit einer Versicherungssumme von 10.000 € ab, errechnet sich der Erwartungswert der Versicherungsleistung wie folgt: Aus der Sterbetafel DAV 2008 T im Anhang B ergibt sich L_{65} = 864.713,26 und L_{67} = 838.163,33, was wir in die obige Formel einsetzen:

$$E(L) = \frac{864.713{,}26 - 838.163{,}33}{864.713{,}26} \cdot 10.000€ = 307€$$

Allgemein kann man für eine *n*-jährige Versicherungsdauer den Erwartungswert der Leistung wie folgt aufschreiben:

$$E(L) = \frac{L_x - L_{x+n}}{L_x} \cdot V$$

Beispiel: Schließt eine 45-Jährige eine Risikolebensversicherung mit einer Laufzeit von 20 Jahren und einer Versicherungssumme von 100.000 € ab, würde man die Einmalprämie hierfür als Erwartungswert der Leistung wie folgt ausrechnen. Aus der Sterbetafel DAV 2008 T im Anhang B lesen wir ab L_{45} = 969.791,24 und $L_{45+20=65}$ = 864.713,26, was wir in die obige Formel einsetzen:

$$E(L) = \frac{969.791{,}24 - 864.713{,}26}{969.791{,}24} \cdot 100.000€ = 10.835€$$

ARBEITSBLATT: RISIKOLEBENSVERSICHERUNG

Die Prämie für eine Risikolebensversicherung mit x = Alter der versicherten Person; n = Versicherungsdauer (in Jahren) und V = Versicherungssumme berechnet man als Erwartungswert der Leistung nach der folgenden Formel:

$$E(L) = \frac{L_x - L_{x+n}}{L_x} \cdot V \quad \text{oder auch } E(L) = q_x \cdot V, \text{ falls } n = 1.$$

Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit q_x und die Anzahl der Lebenden L_x finden sich in der Sterbetafel DAV 2008 T für die Risikolebensversicherung im Anhang B.

Aufgabe 1:

Neben den wichtigsten Kriterien wie Alter der versicherten Person, Höhe der Versicherungssumme und Vertragslaufzeit spielen bei Abschluss einer Risikolebensversicherung eine Reihe von weiteren Faktoren eine wichtige Rolle, die sich negativ auf die Lebenserwartung auswirken können. Wie sehen Beispiele aus, die bei der Preisfindung eine Rolle spielen könnten?

Aufgabe 2:

Berechne mit der Sterbetafel DAV 2008 T im Anhang B die Einmalprämie (als Erwartungswert der Leistung) für eine einjährige Risikolebensversicherung mit der Versicherungssumme 100.000 € für eine versicherte Person im folgenden Alter:

a) $x = 20$ b) $x = 40$ c) $x = 60$

Aufgabe 3:

Berechne mit der Sterbetafel für die Risikolebensversicherung im Anhang B die Einmalprämie für eine Risikolebensversicherung für eine 30-jährige versicherte Person ($x = 30$), eine Versicherungssumme von 10.000 € und folgende Versicherungsdauer:

a) 10 Jahre b) 20 Jahre c) 30 Jahre

Aufgabe 4:

Berechne die Einmalprämie, die Markus' Vater (siehe Fallstudie 1 auf S. 8) für seine Risikolebensversicherung zahlen muss: Alter versicherte Person: 40 Jahre; Versicherungssumme: 300.000 €; Laufzeit: 10 Jahre.

6. RISIKOLEBENSVERSICHERUNG GEGEN LAUFENDE PRÄMIEN

Erläuterungen

Im Kapitel zur Risikolebensversicherung haben wir Versicherungen gegen Einmalprämien zu Beginn der Versicherungsdauer betrachtet. In der Praxis zahlen die Versicherungsnehmer meistens regelmäßige Beiträge, z. B. jährlich oder monatlich. In diesem Kapitel befassen wir uns damit, wie man eine zu Beginn der Versicherungsdauer berechnete Einmalprämie in regelmäßig zu zahlende Prämien umrechnet.

Bei einer Versicherung gegen laufende Prämien ist zusätzlich zu beachten, dass sich der heutige Wert der zukünftigen Prämienzahlungen nicht einfach als Summe der Prämien ergibt, sondern beispielsweise noch die Sterblichkeit zu berücksichtigen ist.

Wir betrachten zunächst die jährliche Zahlungsweise. Bei einjähriger Versicherungsdauer fällt gleich zu Beginn die Prämie P an. Schließt eine x-jährige Person einen zweijährigen Risikolebensversicherungsvertrag ab, würde sie zu Beginn auf jeden Fall die Prämie P zahlen. Ein Jahr später erfolgt die Prämienzahlung nur, wenn bis dahin kein Versicherungsfall (hier: Tod) eingetreten ist. Die Prämie nach einem Jahr zahlen also nur die noch lebenden Versicherungsnehmer.

Aus der Sterbetafel wissen wir, dass die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit für eine x-jährige Person wie folgt ausgerechnet wird:

$$p_x = (1 - q_x) = \frac{L_{x+1}}{L_x}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person das Alter $x + n$ erreicht, beträgt

$${}_n p_x = \frac{L_{x+n}}{L_x}$$

Bei einer n-jährigen Versicherungsdauer fällt die letzte Prämie im Alter $x + n - 1$ an, da die Prämie immer am Anfang des Versicherungsjahres gezahlt wird. Bei einer Jahresprämie von P würde bei einer Versicherungsdauer von n Jahren für eine x-jährige versicherte Person der Erwartungswert der Prämienzahlungen wie folgt aussehen:

$$E(Pr_x) = P + \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot P + \ldots + \frac{L_{x+n-1}}{L_x} \cdot P$$
$$= \frac{L_x + L_{x+1} + \ldots + L_{x+n-1}}{L_x} \cdot P$$

Der Ausdruck $E(Pr_x)$ wird auch als Prämienbarwert bezeichnet.

Nach dem versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzip entspricht der Prämienbarwert dem Erwartungswert der Leistung:

$$E(L) = E(Pr_x) \text{ oder } E(L) = \frac{L_x + \ldots + L_{x+n-1}}{L_x} P$$

Auflösen nach P führt auf

$$P = E(L) \cdot \frac{L_x}{L_x + L_{x+1} + \ldots + L_{x+n-1}}$$

Beispiel: Im letzten Kapitel haben wir den Erwartungswert der Leistung aus einer 2-jährigen Risikolebensversicherung mit Versicherungssumme 10.000 € für einen 65-Jährigen wie folgt ausgerechnet:

$$E(L) = \frac{864.713{,}26 - 838.163{,}33}{864.713{,}26} \cdot 10.000€ = 307€$$

Möchte man statt einer Einmalprämie zu Versicherungsbeginn lieber jährliche Prämien zahlen, berechnet sich die Prämienhöhe mit L_{65} = 864.713,26 und L_{66} = 852.236,75 nach der obigen Formel als

$$P = 307€ \cdot \frac{864.713{,}26}{864.713{,}26 + 852.236{,}75} = 154{,}62€$$

Dabei fällt auf, dass bei jährlicher Zahlungsweise ein Betrag von 2 · 154,62 € = 309,24 € gezahlt wird, während die Einmalprämie lediglich 307 € beträgt. Der höhere Gesamtbetrag bei jährlicher Zahlungsweise muss kompensieren, dass in manchen Fällen im ersten Versicherungsjahr der Versicherungsfall eintritt und so die zweite Jahresprämie nicht mehr gezahlt wird.

Verwenden wir die Formel für den Erwartungswert der Leistung aus dem letzten Kapitel,

$$E(L) = \frac{L_x - L_{x+n}}{L_x} \cdot V$$

so ergibt sich für die jährliche Prämie für einen x-jährigen Versicherungsnehmer:

$$P = \frac{L_x - L_{x+n}}{L_x + L_{x+1} + \ldots + L_{x+n-1}} V$$

Meist verlangen die Unternehmen bei monatlicher Zahlung ein Zwölftel der jährlichen Prämie plus einen Aufschlag. Dieser Aufschlag deckt die zusätzlichen Verwaltungskosten, den Betrag mehrmals im Jahr einzuziehen, und das Risiko, dass der Versicherungsnehmer unterjährig verstirbt. Da diese Effekte nicht sehr groß sind, können wir sie vernachlässigen.

Entscheidet der Versicherungsnehmer sich alternativ für monatliche Zahlungen, berechnen wir die Prämie als $\frac{P}{12}$. Im obigen Beispiel einer 2-jährigen Risikolebensversicherung mit Versicherungssumme von 10.000 € für einen 65-Jährigen würde sich bei monatlicher Zahlung die Prämie von 154,62 € / 12 = 12,89 € ergeben.

Wie bei den bisherigen Übungen verwenden wir die Sterbetafel DAV 2008 T aus dem Anhang B. Da in den Formeln sehr viele Zahlen aufaddiert werden, empfiehlt sich unbedingt die Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms. Hierzu steht unter https://werde-aktuar.de/für-lehrende/schule eine Excel-Datei mit der Sterbetafel bereit. Erläuterung zum Umgang mit Excel findet man im Anhang A.

ARBEITSBLATT: RISIKOLEBENSVERSICHERUNG GEGEN LAUFENDE PRÄMIEN

Nach dem versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzip entspricht der Erwartungswert der Leistungen aus einer Risikolebensversicherung dem Erwartungswert der Prämien für diese Versicherung. Wir verwenden bei den Aufgaben folgende Bezeichnungen: x: Alter der versicherten Person; n: Versicherungsdauer (in Jahren) und V: Versicherungssumme.
Den Erwartungswert der Leistung berechnen wir nach der folgenden Formel, wobei mit L_x die in der Sterbetafel angegebene Anzahl der Lebenden vom Alter x bezeichnet wird:

$$E(L) = \frac{(L_x - L_{x+n})}{L_x} V \quad \text{oder auch} \quad E(L) = q_x V \quad \text{falls} \quad n = 1.$$

Daraus kann man nach der folgenden Formel die jährliche Prämie P berechnen:

$$P = \frac{L_x - L_{x+n}}{L_x + L_{x+1} + \cdots + L_{x+n-1}} \cdot V$$

Eine monatliche Prämie erhalten wir näherungsweise, indem wir die Jahresprämie durch 12 teilen.

Aufgabe 1:

Die Excelmappe, die begleitend zu den Schulmaterialien unter https://werde-aktuar.de/für-lehrende/schule abgelegt ist, enthält die oben genannte Sterbetafel DAV 2008 T. Berechne mit deren Hilfe die Einmalprämie (in Höhe des Erwartungswertes der Leistung) für eine Risikolebensversicherung für eine 30-jährige versicherte Person ($x = 30$), mit einer Versicherungssumme von 10.000 € und mit folgender Versicherungsdauer:
a) 10 Jahre b) 20 Jahre c) 30 Jahre

Aufgabe 2:

Die Excelmappe, die begleitend zu den Schulmaterialien unter https://werde-aktuar.de/für-lehrende/schule bereit steht, enthält die oben genannte Sterbetafel DAV 2008 T. Berechne mit deren Hilfe für die Versicherungen in Aufgabe 1 a) – c) die jeweilige Prämie bei jährlicher Zahlungsweise! Hinweise zur Verwendung der Excelmappe sind im Anhang A zu finden. Vergleiche die jährliche Prämie mit der in Aufgabe 1 ausgerechneten Einmalprämie geteilt durch die Laufzeit. Was fällt Dir dabei auf?

Aufgabe 3:

Berechne die Prämie, die Markus‘ Vater (vgl. Fallstudie 1 auf S. 8) für seine Risikolebensversicherung zahlen muss! Alter versicherte Person: 40 Jahre; Versicherungssumme: 300.000 €; Laufzeit: 10 Jahre

a) Als Einmalprämie b) Bei jährlicher Zahlungsweise c) Bei monatlicher Zahlungsweise

7. ERLEBENSFALLLEISTUNGEN

Erläuterungen

Mit einer Lebensversicherung kann man sich nicht nur gegen einen Todesfall absichern, sondern auch für das Alter vorsorgen. Hierbei geht es entweder um eine kapitalbildende Lebensversicherung, also darum, mit regelmäßigen Prämien für eine Kapitalleistung zu sparen (z. B. für den Kauf eines größeren Hauses), oder darum, gegen laufende Prämien oder gegen eine Einmalprämie eine lebenslange Rente zu erwerben (z. B. Verrentung des Verkaufserlöses eines Handwerkerbetriebs). In beiden Fällen handelt es sich um sogenannte Erlebensfallleistungen, um die es in diesem Kapitel geht.

Oft bieten auch die Arbeitgeberinnen ihren Beschäftigten verschiedene Möglichkeiten an, für das Alter vorzusorgen. Da die Arbeitgeberin beteiligt ist, spricht man in diesem Fall von betrieblicher Altersversorgung. Diese ist meist für beide Seiten attraktiv, was einer Vielzahl gesetzlicher Regelungen, wie z.B. Steuererleichterungen, zu verdanken ist.

Wie der Name sagt, wird eine Erlebensfallleistung nur dann erbracht, wenn die versicherte Person den vertraglich vereinbarten Zeitpunkt erlebt oder – im Fall einer lebenslangen Rente – solange die versicherte Person lebt.

Mit L_x als Anzahl der Lebenden vom Alter x aus der Sterbetafel ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass eine x-jährige Person das Alter $x + n$ erlebt zu folgender Formel

$$_{n}p_x = \frac{L_{x+n}}{L_x}$$

Schließt also eine x-jährige Person eine Erlebensfallversicherung mit einer Versicherungsdauer von n Jahren und der Versicherungssumme V ab, so berechnen wir den Erwartungswert der Leistung als

$$E(L) = {}_{n}p_x \cdot V = \frac{L_{x+n}}{L_x} \cdot V$$

Beispiel: Schließt eine 45-Jährige eine reine Erlebensfallversicherung mit einer Laufzeit von 20 Jahren und einer Versicherungssumme von 100.000 € ab (ohne Todesfallabsicherung), wird dafür die Einmalprämie zu Versicherungsbeginn ausgerechnet als

$$E(L) = \frac{947.117{,}43}{982.673{,}08} \cdot 100.000€ = 96.382€$$

wobei $L_{45} = 982.673{,}08$ und $L_{65} = 947.117{,}43$ die Werte aus der Sterbetafel DAV 2004 R für die Erlebensfallleistungen im Anhang C sind.

Werden statt einer einmaligen Kapitalzahlung regelmäßige Zahlungen in Form einer befristeten oder lebenslangen Rente vereinbart, so müssen für die Berechnung des Erwartungswerts der Leistung alle künftig möglichen Zahlungen berücksichtigt werden. Wird eine lebenslange Rente vereinbart, muss jedes einzelne Alter bis zum Ende der Sterbetafel berücksichtigt werden, denn jede Person hat theoretisch die Chance, bis zum höchstmöglichen Alter zu leben – erst danach wird die Erlebensfallwahrscheinlichkeit auf 0 gesetzt. Dabei wird jede einzelne Zahlung mit der Wahrscheinlichkeit gewichtet, dass sie auch wirklich geleistet wird – dies ist dann der Fall, wenn die versicherte Person diesen Zeitpunkt erlebt.

Vereinbart eine x-jährige Person eine auf m Jahre befristete Rente der Höhe R, die in n Jahren beginnt, so berechnen wir den Erwartungswert dieser Rente als

$$E(L) = \frac{L_{x+n}}{L_x} \cdot R + \frac{L_{x+n+1}}{L_x} \cdot R + \cdots + \frac{L_{x+n+m-1}}{L_x} \cdot R$$

Beispiel: Wird in unserem vorherigen Beispiel die Versicherungssumme von 100.000 € nicht auf einmal, sondern über einen Zeitraum von 5 Jahren zu je 20.000 € im Jahr ausgezahlt, errechnet sich der Erwartungswert der Leistung als

$$E(L) = \left(\frac{L_{65}}{L_{45}} + \frac{L_{66}}{L_{45}} + \frac{L_{67}}{L_{45}} + \frac{L_{68}}{L_{45}} + \frac{L_{69}}{L_{45}}\right) \cdot 20.000€$$

$$= \left(\frac{947.117{,}43}{982.673{,}08} + \frac{944.177{,}11}{982.673{,}08} + \frac{941.054{,}24}{982.673{,}08} + \frac{937.689{,}50}{982.673{,}08} + \frac{934.066{,}74}{982.673{,}08}\right) \cdot 20.000€ = 95.741€$$

Soll die Rente lebenslang fließen, so berechnen wir den Erwartungswert dieser Rente als

$$E(L) = \frac{L_{x+n}}{L_x} \cdot R + \frac{L_{x+n+1}}{L_x} \cdot R + \cdots + \frac{L_{121}}{L_x} \cdot R$$

Das bedeutet keineswegs, dass die Versicherungsunternehmen damit rechnen, dass alle Versicherten 121 Jahre alt werden. Im Gegenteil, für eine 65-Jährige beträgt die Wahrscheinlichkeit, 121 Jahre alt zu werden nur

$$\frac{L_{121}}{L_{65}} = \frac{7.860{,}45}{947.117{,}43} = 0{,}1\%$$

Die obige Formel lässt sich umformen zu

$$E(L) = \frac{(L_{x+n} + L_{x+n+1} + \cdots + L_{121})}{L_x} \cdot R$$

Dabei haben wir unterstellt, dass die Rente stets in einem Betrag am Jahresanfang gezahlt wird, so dass in jedem Alter noch die komplette Jahresrente gezahlt wird, auch wenn die versicherte Person dann in der Mitte des Jahres stirbt.

In der Praxis wird die Rente meistens monatlich gezahlt. Dann werden die Zahlungen nur in den Monaten erbracht, die die Rentenempfängerinnen erleben. Man kann sagen, dass die Todesfälle durchschnittlich in der Jahresmitte passieren. Also ist der Erwartungswert der Rentenzahlung bei monatlicher Zahlungsweise etwas niedriger als bei jährlichen Zahlungen zu Jahresbeginn. Der Einfachheit halber setzen wir diesen Effekt für eine lebenslange Rente mit einer halben Jahresrente an (ohne Berücksichtigung der Sterblichkeit):

$$E\left(L^{(12)}\right) = (L_{x+n} + L_{x+n+1} + \cdots + L_{121}) \cdot \frac{R}{L_x} - \frac{R}{2}$$

Beispiel: Für eine 100-Jährige wird der Erwartungswert einer lebenslangen Rente von 100 € im Monat berechnet als

$$E\left(L^{(12)}\right) = (292.143{,}11 + 259.757{,}44 + 229.728{,}57 + 202.081{,}19 + 176.803{,}36 + 153.850{,}22 + 133.149{,}13 + 114.604{,}52 + 98.102{,}16 + 83.514{,}17 + 70.703{,}22 + 59.526{,}39 + 49.838{,}65 + 41.496{,}08 + 34.358{,}34 + 28.290{,}78 + 23.166{,}07 + 18.865{,}43 + 15.279{,}37 + 12.308{,}13 + 9.861{,}86 + 7.860{,}45) \cdot \frac{100€ \cdot 12}{292.143{,}11} - \frac{100€ \cdot 12}{2} = 8.089€$$

ARBEITSBLATT: ERLEBENSFALLLEISTUNGEN

Die Prämie für eine Erlebensfallleistung mit x = Alter der versicherten Person; n = Anzahl der Jahre von Vertragsabschluss bis zur Auszahlung und V = Versicherungssumme berechnet man als

$$E(L) = {}_n p_x \cdot V = \frac{L_{x+n}}{L_x} \cdot V$$

wobei ${}_n p_x$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass die x-jährige versicherte Person die n Jahre bis zur Auszahlung überlebt. Dabei wird mit L_x die Anzahl der Lebenden vom Alter x bezeichnet. Wird statt einer Einmalleistung eine jährliche Rente der Höhe R vereinbart, die in n Jahren beginnt und im Alter z endet, so berechnet man als Erwartungswert der Rentenleistungen nach der folgenden Formel:

$$E(L) = \frac{(L_{x+n} + L_{x+n+1} + \cdots + L_z)}{L_x} \cdot R$$

Bei einer lebenslangen Rente setzen wir statt z das Endalter der verwendeten Sterbetafel an, in unserem Fall also $z = 121$. Die hier verwendeten Werte sind in der Tabelle im Anhang C zu finden. Wir verwenden die Sterbetafel DAV 2004 R für die Erlebensfallleistungen.

Aufgabe 1:

Berechne mit der Sterbetafel DAV 2004 R den Einmalbeitrag (als Erwartungswert der Leistung) für eine Erlebensfallleistung der Höhe 100.000 €, die im Alter 65 ausgezahlt wird, wenn die versicherte Person bei Vertragsabschluss folgendes Alter hat:

a) $x = 20$ b) $x = 30$ c) $x = 40$

Aufgabe 2:

Die Excelmappe, die begleitend zu den Schulmaterialien unter https://werde-aktuar.de/für-lehrende/schule bereit steht, enthält die hier verwendete Sterbetafel DAV 2004 R. Hinweise zur Verwendung der Excelmappe sind im Anhang zu finden. Berechne damit den Einmalbeitrag für eine sofortbeginnende Zeitrente für eine 60-jährige versicherte Person ($x = 60$), eine Jahresrente von 10.000 € und folgende Dauer der Rentenzahlungen: a) 5 Jahre b) 15 Jahre c) 30 Jahre

Aufgabe 3:

Berechne mit der Sterbetafel DAV 2004 R den Einmalbeitrag für eine lebenslange Rente der Höhe 10.000 €, wenn die Rente im Alter 65 beginnt und wenn der Vertrag im Alter 30 abgeschlossen wird! Wie ändert sich dieser, wenn der Vertrag stattdessen im Alter 60 abgeschlossen wird?

Tipp: *Der Erwartungswert einer sofort beginnenden, lebenslangen Rente der Höhe 1 für eine x-jährige Person entspricht in etwa der restlichen Lebenserwartung in Jahren für diese Person.*

8. ÜBERSCHUSSBETEILIGUNG

Erläuterungen

Ein Verständnis des Geschäftsmodells eines Lebensversicherungsunternehmens ist ohne Betrachtung der Überschussbeteiligung nicht möglich. Durch die Verwendung von vorsichtigen Rechnungsgrundlagen entstehen zwangsläufig Gewinne bzw. Überschüsse. Diese verbleiben nicht im Unternehmen bzw. werden als Dividenden an die Aktionäre ausgeschüttet, sondern müssen nach gesetzlichen Vorgaben zum größten Teil an den Kunden ausgeschüttet werden. Deshalb führen Leistungsprognosen, die nur die Garantie berücksichtigen, zu einem verzerrten Bild.

Wenn die Lebensversicherungsunternehmen ihre Kunden über die aus den Versicherungsverträgen erwarteten Leistungen informieren, wissen sie noch nicht, wie die künftigen Gewinne ausfallen werden. Deshalb geben sie oft mehrere mögliche Auszahlungsbeträge an – die sich ergeben, wenn künftig die Gewinne unverändert bleiben, oder wenn sich diese in Zukunft verbessern oder verschlechtern.

Wie bereits in den Kapiteln zu Rechnungsgrundlagen und Sterblichkeiten erläutert, verwenden die Lebensversicherungsunternehmen besonders vorsichtige Annahmen. So werden Risikolebensversicherungen mit Tafeln kalkuliert, die Sicherheitsaufschläge enthalten, und Rentenversicherungen mit Tafeln, die Sicherheitsabschläge, also geringere als die beobachteten Sterblichkeiten enthalten. Gesetzlich stützt sich die vorsichtige Kalkulation auf das Versicherungsaufsichtsgesetz (beispielsweise VAG §138), das die vorsichtige Kalkulation vorschreibt, um die Finanzierbarkeit der Garantie zu gewährleisten. Durch dieses Vorsichtsprinzip entstehen fast zwangsläufig Gewinne. Beispielsweise wird am Kapitalmarkt eine über dem Rechnungszins liegende Verzinsung verdient. Bei einer Risikolebensversicherung sind die Zahlungen im Todesfall nicht so hoch wie ursprünglich aufgrund der höheren Wahrscheinlichkeiten in der Sterbetafel erwartet. Bei Rentenversicherungen fallen auf dem Kollektiv der Versicherungsverträge geringere Rentenzahlungen an, weil die tatsächliche Sterblichkeit höher ist.

Diese Gewinne dürfen die Versicherungsunternehmen nicht komplett einbehalten oder an den Aktionär auszahlen, sondern sie müssen diese zum überwiegenden Teil über die Überschussbeteiligung wieder an den Kunden zurückerstatten. Gewinne aus den vorsichtigen Sterblichkeiten gehen beispielsweise zu mindestens 90% an die Versicherungskunden. Damit haben Personenversicherungsunternehmen ein besonderes Alleinstellungsmerkmal im Vergleich zu anderen Unternehmen wie etwa ein Industrieunternehmen: Sie müssen ihre Kunden an ihren Gewinnen beteiligen.

Die gesetzliche Grundlage hierfür ist die sogenannte Mindestzuführungsverordnung. Für die Gewinnbeteiligung gibt es verschiedene Möglichkeiten. In der Praxis sind unter anderem folgende Systeme für die laufende Überschussbeteiligung üblich:

- Die Versicherung kann das Geld in eine Versicherung gleicher Art investieren und dem Kunden damit die garantierte Ablauf- oder Rentenleistung erhöhen.

- Das überschüssige Geld kann in eine riskantere Kapitalanlage wie etwa einen Investmentfonds investiert werden.

- Der Beitrag wird reduziert, die sogenannte Beitragsreduktion.

Neben der laufenden Überschussbeteiligung gibt es oft noch eine Schlussgewinnbeteiligung, die ausgezahlt wird, wenn der Vertrag ausläuft – entweder durch Erreichen der vertraglich vereinbarten Laufzeit, durch Tod, durch Storno oder beim Rentenübergang.

Die vorsichtige Berechnungsweise führt in der öffentlichen Diskussion manchmal zu Missverständnissen. Tatsächlich ist die gezahlte Garantieleistung im Vergleich zu anderen Kapitalanlagen häufig unattraktiv. Eine Betrachtung der Profitabilität eines Lebensversicherungsvertrags kann nicht ohne Berücksichtigung der Überschussbeteiligung erfolgen.

ARBEITSBLATT: ÜBERSCHUSSBETEILIGUNG

Bei Abschluss eines Lebensversicherungsvertrags wird dem Versicherungsnehmer zunächst nur eine Ablaufleistung versprochen, die sich am Garantiezins orientiert und somit häufig noch nicht besonders attraktiv erscheint. Lebensversicherungsunternehmen sind jedoch gesetzlich verpflichtet, ihre Kunden an ihren Gewinnen zu beteiligen, wodurch die Leistungen im Allgemeinen deutlich höher ausfallen als zu Beginn versprochen.

Aufgabe 1:

Wie auf dem Übungsblatt zur Sterbetafel in Aufgabe 4 bereits angesprochen, werden die Beiträge für Risikolebensversicherungen mit Sterblichkeiten berechnet, die höher als die tatsächlich beobachteten Sterblichkeiten sind. Entsprechend verwenden die Unternehmen für Rentenversicherungen Sterbetafeln mit niedrigeren Sterblichkeiten. Auch bei anderen Annahmen, die in die Berechnungen einfließen, sind die Unternehmen vorsichtig. Erläutere kurz, warum dadurch beim Unternehmen Gewinne entstehen! Unterscheide dabei zwischen einer Risiko- und einer Rentenversicherung!

Aufgabe 2:

Diese vorsichtige Berechnungsweise ist vom Gesetzgeber vorgeschrieben. Warum hat dieser und damit auch die Allgemeinheit ein Interesse daran, dass die Unternehmen ihre Beiträge vorsichtig kalkulieren?

Da durch die vorsichtigen Grundlagen automatisch Gewinne entstehen, sind die Lebensversicherungsunternehmen aber ebenfalls gesetzlich verpflichtet, diese mit dem Kunden zu teilen. Die Versicherungskunden erhalten zusätzlich zur bei Vertragsbeginn garantierten Leistung eine Überschussbeteiligung. Es gibt verschiedene Varianten, wie z. B.

- *Beitragsverrechnung (der Versicherungsnehmer muss bei gleichbleibender Leistung weniger Beitrag zahlen)*
- *Bonus (die Todesfall-, Ablauf- oder Rentenleistung wird erhöht)*
- *Investition in Fondsanteile (das überschüssige Geld wird in eine riskantere Kapitalanlage investiert, um einen besonders hohen zusätzlichen Ertrag zu generieren)*

Zudem sehen die meisten Verträge eine Schlussgewinnbeteiligung vor. Hier bekommt der Kunde zusätzliches Geld bei Ablauf des Vertrages oder bei Rentenübergang.

Aufgabe 3:

Eine Zeitung bringt die Schlagzeile „Abzocke: Lebensversicherer kalkulieren damit, dass ihre Kunden ein biblisches Alter erreichen“. Der Verfasser des Artikels führt aus, dass Lebensversicherungsunternehmen mit Sterbetafeln rechnen, die zu unrealistisch hohen Lebenserwartungen führen. Damit seien ihre Produkte für die Kunden unattraktiv. Im Gegenzug würden die Unternehmen selbst hohe Gewinne einfahren. Inwieweit ist die Aussage richtig? Was kann man allerdings nicht so stehen lassen?

VERTIEFUNG: LEISTUNGSBARWERTE UND ÄQUIVALENZPRINZIP 9.

Erläuterungen

In den vorhergehenden Kapiteln haben wir gelernt, wie Prämien für Risikolebensversicherungen und Erlebensfallleistungen berechnet werden. Bei den Berechnungen haben wir nur Sterbetafeln verwendet und der Einfachheit halber auf die Verzinsung verzichtet. Da die eingenommenen Prämien verzinslich angelegt werden, geht in der Praxis neben den Sterbetafeln auch der sogenannte Rechnungszins in die Berechnung ein – wie genau, wird in diesem Kapitel beschrieben.

Versicherungsleistungen stellen einen Zahlungsstrom (Cashflow) $c = (c_0, c_1,\ldots,c_n)$ dar. Zu jedem Zeitpunkt j ist im Vertrag festgelegt, welche Zahlung c_j unter welchen Bedingungen fällig wird. Eine Todesfallleistung wird bei der Kalkulation als eine nachschüssige Zahlung (Zahlung am Ende des Jahres) im Todesjahr angenommen, während die Erlebensfallleistung eine vorschüssige Zahlung (Zahlung am Anfang des Jahres) im j-ten Versicherungsjahr ist.

Bei der Kalkulation stellt sich die zentrale Frage, welchen Wert ein Zahlungsstrom von Versicherungsleistungen hat. Da der Zahlungsstrom vom Verlauf des Lebens der versicherten Person (Biometrie) abhängt, haben wir bisher den heutigen Wert eines Zahlungsstroms als Erwartungswert der Summe aller künftigen Zahlungen berechnet:

$$E(L) = E(c_0 + c_1 + \cdots + c_n) = E(c_0) + \cdots + E(c_n)$$

Wird zusätzlich eine Verzinsung berücksichtigt, so ändert sich die Berechnung und man spricht von einem ***Leistungsbarwert***. Man kann sich das so vorstellen, dass das Geld für die Versicherungsleistungen auf einem Sparkonto verzinslich angelegt ist und jährlich um den Rechnungszins i wächst (d. h. mit $(1 + i)$ multipliziert wird). Wenn man in einem Jahr den Betrag c auszahlen möchte, reicht es, den Betrag $v \cdot c$ mit

$$v = \frac{1}{1+i}$$

einzuzahlen. Dann steigt dieser nach einem Jahr durch die Verzinsung auf die gewünschte Auszahlung

$$v \cdot c \cdot (1+i) = \frac{1+i}{1+i} \cdot c = c.$$

Dabei spricht man von Abzinsung oder Diskontierung und bezeichnet v als Diskontierungsfaktor. Damit wird der Leistungsbarwert als diskontierter Erwartungswert aller Zahlungen wie folgt definiert:

$$LBW = v^0 \cdot E(c_0) + v^1 \cdot E(c_1) + \cdots + v^n \cdot E(c_n).$$

Wenn die versicherte Person die komplette Versicherungsdauer überlebt, wird kein Geld aus der Risikolebensversicherung gezahlt – man bekommt scheinbar keine Gegenleistung für die Versicherungsbeiträge. Doch genau so funktioniert Versicherungsschutz: Alle Kundinnen zahlen niedrige Prämien, die meisten ohne Gegenleistung – dadurch kommt viel Geld zusammen und in den wenigen Fällen, in denen die versicherte Person während der Versicherungsdauer stirbt, kann eine hohe Versicherungssumme gezahlt werden.

Wir betrachten als Beispiel eine Risikolebensversicherung der Dauer n mit Versicherungssumme V für eine x-jährige Person.

Hier gelangt die Versicherungssumme nach j Jahren zur Auszahlung (nachschüssig, also am Jahresende), wenn der Tod im j-ten Versicherungsjahr eintritt, also im Alter $x + j - 1$. Die Todesfallwahrscheinlichkeit im Alter $x + j - 1$ beträgt q_{x+j-1}, die Voraussetzung dafür ist aber, dass die versicherte Person die ersten $j - 1$ Jahre nach Vertragsabschluss überlebt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür wird mit ${}_{j-1}p_x$ bezeichnet. Damit gilt

$$E(c_j) = {}_{j-1}p_x \cdot q_{x+j-1} \cdot V = \frac{L_{x+j-1}}{L_x} \cdot \frac{L_{x+j-1} - L_{x+j}}{L_{x+j-1}} \cdot V = \frac{L_{x+j-1} - L_{x+j}}{L_x} \cdot V$$

Beispiel: Schließt eine 40-Jährige eine Risikolebensversicherung der Dauer 5 Jahre mit Versicherungssumme 100.000 € ab, dann beträgt der Erwartungswert einer Zahlung im vierten Versicherungsjahr nach der Formel

$$E(c_4) = 100.000€ \cdot {}_3p_{40} \cdot q_{43} = 100.000€ \cdot \frac{L_{43} - L_{44}}{L_{40}},$$

also

$$E(c_4) = 100.000€ \cdot \frac{972.944{,}44 - 971.462{,}64}{976.503{,}87} = 151{,}74€.$$

Tritt der Todesfall erst nach n Jahren oder später ein, wird keine Zahlung fällig. Bei einem Todesfall im j-ten Jahr mit $j < n$ wird die Versicherungssumme ausgezahlt. Deshalb müssen wir für jedes Versicherungsjahr j die Zahlungswahrscheinlichkeit berechnen und über alle Versicherungsjahre aufsummieren.

Wir betrachten zunächst das Vorgehen analog zu Abschnitt 5 Risikolebensversicherung ohne Berücksichtigung der Verzinsung. Hier entspricht der Leistungsbarwert dem Erwartungswert der Zahlungen:

$$LBW = \left(\frac{L_x - L_{x+1}}{L_x} + \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x} + \dots + \frac{L_{x+n-1} - L_{x+n}}{L_x}\right) \cdot V = \left(1 - \frac{L_{x+n}}{L_x}\right) \cdot V$$

In unserem obigen Beispiel einer 5-jährigen Risikolebensversicherung für eine 40-Jährige mit Versicherungssumme 100.000 € wird demnach der Leistungsbarwert wie folgt errechnet:

$$LBW = \left(1 - \frac{L_{45}}{L_{40}}\right) \cdot 100.000€ = 687{,}41€$$

Rechnet man mit Verzinsung, ist der j-te Term mit v^j zu multiplizieren:

$$LBW = \left(v \cdot \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x} + v^2 \cdot \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x} + \dots + v^n \cdot \frac{L_{x+n-1} - L_{x+n}}{L_x}\right) \cdot V$$

Berechnet man den Leistungsbarwert der oben genannten Risikolebensversicherung mit einem Rechnungszins von 3%, ergibt sich dieser zu

$$LBW = \left(\frac{1}{1{,}03} \cdot \frac{L_{40} - L_{41}}{L_{40}} + \frac{1}{1{,}03^2} \cdot \frac{L_{41} - L_{42}}{L_{40}} + \dots + \frac{1}{1{,}03^5} \cdot \frac{L_{44} - L_{45}}{L_{40}}\right) \cdot 100.000€.$$

Unter Verwendung der Sterbetafel DAV 2008 T für die Risikolebensversicherung aus dem Anhang erhalten wir $LBW = 625{,}60€$.

Durch die Diskontierung fällt der Leistungsbarwert deutlich geringer aus.

Nach dem Leistungsbarwert wollen wir nun auch den Prämienbarwert betrachten. Während der Versicherungsdauer und solange die versicherte Person lebt, zahlt sie zu Jahresbeginn eine Prämie der Höhe *P*. Die erste Prämie ist gleich zu Beginn der Versicherungsdauer fällig. Die Prämie nach *j* Jahren wird nur gezahlt, wenn die versicherte Person diese *j* Jahre überlebt:

$$E(c_j) = P \cdot {}_jp_x = P \cdot \frac{L_{x+j}}{L_x}$$

Mit Berücksichtigung der Verzinsung beträgt der Prämienbarwert für eine *n*-jährige Prämienzahlung:

$$PBW = P \cdot \left(1 + v \cdot \frac{L_{x+1}}{L_x} + v^2 \cdot \frac{L_{x+2}}{L_x} + \cdots + v^{n-1} \cdot \frac{L_{x+n-1}}{L_x}\right)$$

Dabei wird die erste Prämie nicht abgezinst, da sie sofort fällig wird, ohne dass der Zins wirken kann.

Beispiel: Der Prämienbarwert bei einer Versicherungsdauer von 5 Jahren und einer jährlichen Prämie der Höhe 100 € für eine 40-Jährige beträgt bei einer Verzinsung von 3%

$$PBW = 100€ \cdot \left(1 + \frac{1}{1{,}03}\frac{L_{41}}{L_{40}} + \cdots + \frac{1}{1{,}03^4}\frac{L_{44}}{L_{40}}\right) = 470{,}60€.$$

Aus früheren Kapiteln wissen wir, dass die Tarifkalkulation auf dem Grundprinzip beruht, dass die Leistungen des Versicherungsunternehmens und die Prämienzahlungen der Versicherungsnehmerin einander entsprechen müssen. Konkret fordert dieses Äquivalenzprinzip, dass der Leistungsbarwert gleich dem Prämienbarwert sein muss: *LBW = PBW (1)*

Will man ausrechnen, wie hoch die jährlich über *n* Jahre zu zahlende Prämie ist, um eine bestimmte Leistung zu finanzieren, so kann man nun die Formel (1) umstellen:

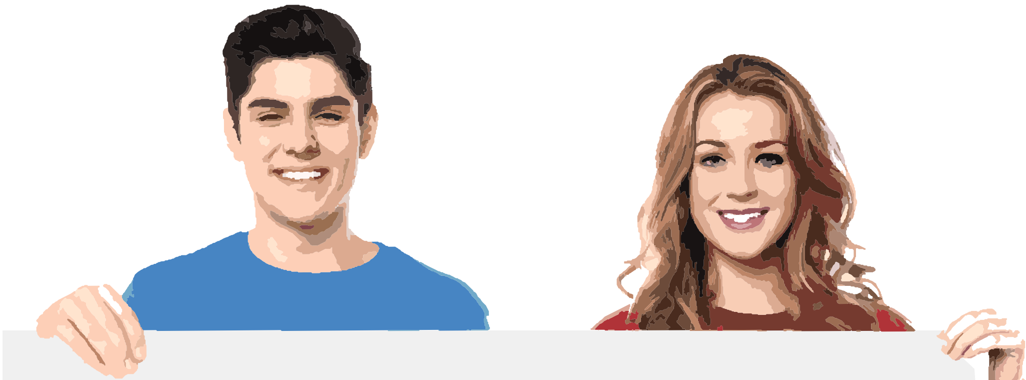
$$P = \frac{LBW}{\left(1 + v \cdot \frac{L_{x+1}}{L_x} + v^2 \cdot \frac{L_{x+2}}{L_x} + \cdots + v^{n-1} \cdot \frac{L_{x+n-1}}{L_x}\right)}$$

Prämien- und Leistungsbarwerte werden als versicherungsmathematische Barwerte bezeichnet, da die Zahlungen vom Zufall abhängen. Im Spezialfall, dass die Zahlungen mit Sicherheit geleistet werden, spricht man vom finanzmathematischen Barwert.

Beispiel: Mit einem Rechnungszins von 3% und dem oben berechneten Leistungsbarwert ergibt sich die folgende Prämie bei Prämienzahlungsdauer 5 Jahre und Beginn der Prämienzahlung im Alter 40:

$$P = \frac{625{,}60€}{\left(1 + \frac{1}{1{,}03} \cdot \frac{975.442{,}90}{976.503{,}87} + \cdots + \frac{1}{1{,}04}\frac{971.462{,}64}{976.503{,}87}\right)} = 132{,}94€$$

ARBEITSBLATT: LEISTUNGSBARWERTE



Aus dem Übungsblatt zur Sterbetafel kennen wir die Formel für die mehrjährige Überlebenswahrscheinlichkeit, wobei x das Alter der Person und n die Anzahl der Jahre ist:

$$_np_x = (1-q_x)(1-q_{x+1}) \cdot \ldots \cdot (1-q_{x+n-1}) = \frac{L_{x+n}}{L_x}$$

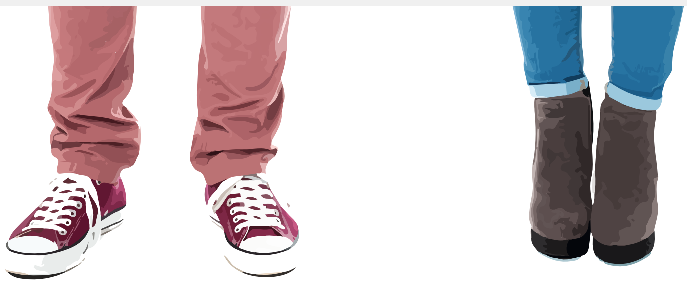
Die Formel für den Leistungsbarwert einer Risikolebensversicherung lautet

$$LBW = V \cdot \left(v \cdot q_x + v^2 \cdot {}_1p_x \cdot q_{x+1} + \cdots + v^n \cdot {}_{n-1}p_x q_{x+n-1}\right)$$

Dabei ist $v = \frac{1}{1+i}$ der sogenannte Diskontierungsfaktor.

Den Prämienbarwert für eine jährlich zu zahlende Prämie der Höhe P berechnet man als

$$PBW = P \cdot \left(1 + v \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + \cdots\right)$$



Aufgabe 1:

Berechne mit der Sterbetafel DAV 2008 T die folgenden Überlebenswahrscheinlichkeiten:

a) für eine 20-Jährige die 1-jährige, die 20-jährige und die 50-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit p_{20}, ${}_{20}p_{20}$ und ${}_{50}p_{20}$

b) für eine 60-Jährige die 1-jährige, die 20-jährige und die 50-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit p_{60}, ${}_{20}p_{60}$ und ${}_{50}p_{60}$

Aufgabe 2:

Die Excelmappe, die begleitend zu den Schulmateralien unter https://werde-aktuar.de/für-lehrende/schule abgelegt ist, enthält die Sterbetafel DAV 2008 T aus dem Anhang B sowie im Tabellenblatt Berechnung LBW Todesfall einige hilfreiche Formeln. Berechne mit deren Hilfe für eine Risikolebensversicherung der Dauer n = 30 Jahre für eine 20-jährige Person mit Versicherungssumme S = 100.000 €:

a) den Leistungsbarwert mit einem Rechnungszins von 0%

b) den Leistungsbarwert mit einem Rechnungszins von 2%

c) die Höhe der jährlichen Prämien mit Rechnungszins von 0%, wenn über den kompletten Vertragszeitraum von 30 Jahren Prämien geleistet werden.

d) die Höhe der jährlichen Prämien mit Rechnungszins von 2%, wenn über den kompletten Vertragszeitraum von 30 Jahren Prämien geleistet werden.

Aufgabe 3:

Die Excelmappe, die begleitend zu den Schulmateralien unter https://werde-aktuar.de/für-lehrende/schule bereit steht, enthält die Sterbetafel DAV 2004 R aus dem Anhang C sowie im Tabellenblatt Berechnung LBW Erleben einige hilfreiche Formeln. Wie hoch sind die jährlichen Prämien für die Versicherung aus Aufgabe 2 und die in 2a) und 2b) errechneten Leistungsbarwerte, wenn man die Prämien mit der Sterbetafel DAV 2004 R berechnet?

a) für den Leistungsbarwert von 3.163,40 € die Höhe der jährlichen Prämien mit Rechnungszins von 0%, wenn über den kompletten Vertragszeitraum von 30 Jahren Prämien geleistet werden.

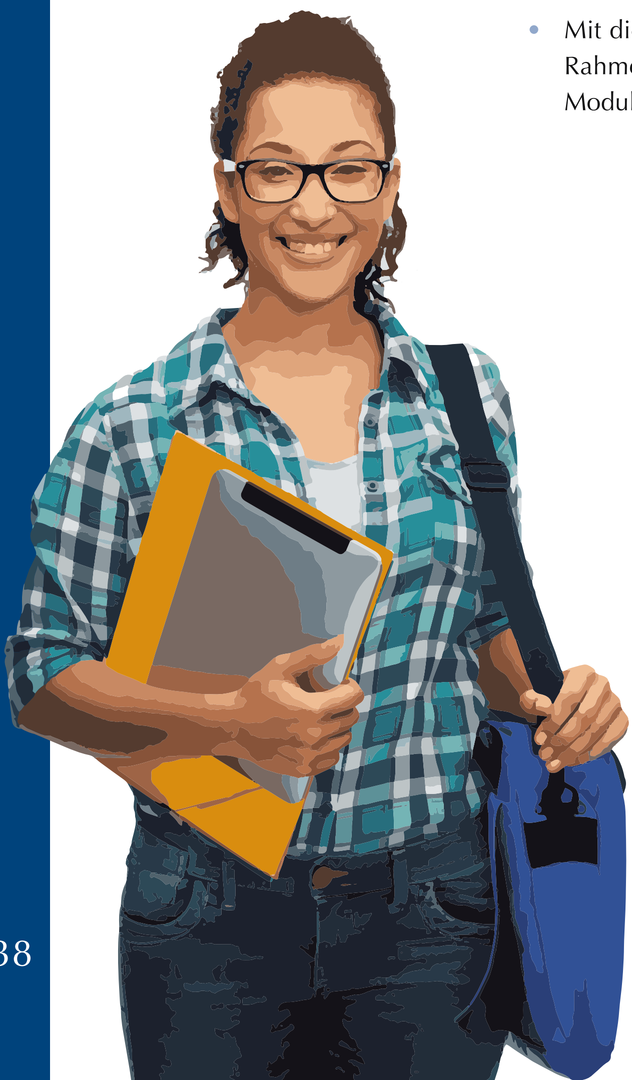
b) für den Leistungsbarwert von 2.155,51 € die Höhe der jährlichen Prämien mit Rechnungszins von 2%, wenn über den kompletten Vertragszeitraum von 30 Jahren Prämien geleistet werden.

10. AUSBLICK

Die vorliegende Broschüre gibt einen ersten Einblick in die Berechnung von Lebensversicherungsprodukten. Durch die Unsicherheiten am Kapitalmarkt, die weiter steigende Lebenserwartung und die damit verbundene immer größere Bedeutung einer sicheren Altersvorsorge wachsen die Herausforderungen, die sich vor allem auch den Mathematikern und Aktuaren stellen.

Wir möchten nur einige wichtige Themen kurz nennen, die wir an dieser Stelle nicht weiter ausführen konnten:

- die Berufsunfähigkeitsversicherung, die bezahlt, wenn ein Arbeitnehmer seinen Beruf nicht mehr ausüben kann.
- die fondsgebundene Versicherung, bei der die gezahlten Prämien in Aktien und Fonds investiert werden. Diese bietet deutlich mehr Flexibilität, die grundlegenden Berechnungsmechanismen sind aber die gleichen wie bei einer klassischen Lebensversicherung.
- die Rückstellungsberechnung, die bilanzielle Perspektive und die Feinheiten der Überschussbeteiligung, die wir in Abschnitt 8 nur grob skizziert haben.
- Mit diesen und anderen Themen beschäftigen sich einschlägige Vorlesungen im Rahmen eines Studiums der Mathematik, Wirtschaftsmathematik etc. bzw. das Modul Versicherungsmathematik im Rahmen der Ausbildung zum Aktuar DAV.



TABELLENKALKULATION A.

Tabellenkalkulationsprogramme wie Excel eignen sich besonders gut für Berechnungen in der Lebensversicherung, da meist sehr viele Zahlen in die Formeln einfließen. Unter dem Link https://werde-aktuar.de/für-lehrende/schule haben wir eine Excel-Datei zur Verfügung gestellt, die bereits die hier verwendeten Sterbetafeln enthält. Im Folgenden zeigen wir ein paar Beispiele, wie Excel die Berechnungen in der Lebensversicherung vereinfachen kann.

Beispiel: Berechnung der Lebenserwartung, siehe auch Aufgabe 3 auf dem Übungsblatt zu den Sterbetafeln. Hierfür steht im Tabellenblatt DAV 2008 T Aufgaben eine Kopie der verwendeten Sterbetafel DAV 2008 T bereit. In dieser Kopie wurden die Alter von 0 bis 5 weggelassen, damit die Zeilennummer mit dem Alter übereinstimmt. Die verwendete Formel lautet:

$$e_\omega = \frac{1}{2} \text{ bzw.} e_x = \frac{1}{2} q_x + (e_{x+1} + 1)(1 - q_x).$$

wobei mit ω das Höchstalter der Sterbetafel bezeichnet wird, also in unserem Fall ω = 120. In der Spalte A der Tabelle ist das Alter angegeben, in der Spalte B die (einjährige) Sterbewahrscheinlichkeit q_x und in der Spalte C die Anzahl der Lebenden L_x. In der Spalte D wollen wir die Lebenserwartung e_x ausrechnen. Die Formel oben startet beim höchstmöglichen Alter 120 – in diesem Alter ist die Lebenserwartung $\frac{1}{2}$ Jahr, deshalb tragen wir 0,5 als Wert in die Zelle D120 ein:

	A	B	C	D	E
3	Alter	1. Ordnung			
4	x	q_x	L_x	e_x	
113	113	0,828286	0,00		
114	114	0,856866	0,00		
115	115	0,885503	0,00		
116	116	0,914144	0,00		
117	117	0,942727	0,00		
118	118	0,971181	0,00		
119	119	0,993782	0,00		
120	120	1,000000	0,00	0,5	
121					

Davon ausgehend berechnen wir nun die Lebenserwartung für das nächstniedrigere Alter 119, dann 118 usw. Nach der Formel oben errechnet sich die Lebenserwartung für das Alter 119 als

$$e_{119} = \frac{1}{2} q_{119} + (e_{120} + 1)(1 - q_{119}).$$

Dabei ist q_{119} die Sterbewahrscheinlichkeit im Alter 119 – diese steht in der Zelle B119. Und mit e_{120} wird die Lebenserwartung im Alter 120 bezeichnet, die wir soeben in die Zelle D120 eingetragen haben. Dies tragen wir in die Formel in der Zelle D119 ein (die Formel wird daneben angezeigt):

__Tipp:__ Will man eine Formel aus einer Zelle in die benachbarte Zelle kopieren, dann klickt man in die rechte untere Ecke dieser Zelle, lässt die linke Maustaste gedrückt und zieht die Formel in die gewünschte Richtung. Hat man neben einer ganzen Liste von Zahlen die oberste Zelle mit einer Formel gefüllt und will man diese in alle darunterliegenden Zellen bis zum Ende der Liste kopieren, reicht ein Doppelklick auf die rechte untere Ecke der obersten Zelle.

	A	B	C	D	E
3	Alter	1. Ordnung			
4	x	q_x	L_x	e_x	Formel
113	113	0,828286	0,00		
114	114	0,856866	0,00		
115	115	0,885503	0,00		
116	116	0,914144	0,00		
117	117	0,942727	0,00		
118	118	0,971181	0,00		
119	119	0,993782	0,00	0,51	=0,5*B119+(D120+1)*(1-B119)
120	120	1,000000	0,00	0,5	
121					

Diese Formel gilt auch für alle niedrigeren Alter in der Tabelle, deshalb kopieren wir die Formel bis ganz nach oben in die Zelle D5. Dabei passen sich die Formeln den Zeilennummern an, so dass sie für jedes Alter richtig übernommen werden. So sieht man, wenn man zum Beispiel die Zelle D5 markiert, oben im Formelfenster die dazugehörige Formel:

D5 =0,5*B5+(D6+1)*(1-B5)

Öffentlich

	A	B	C	D	E
3	Alter	1. Ordnung			
4	x	q_x	L_x	e_x	
5	5	0,000173	993.195,32	72,28	
6	6	0,000145	993.024,00	71,29	
7	7	0,000127	992.880,50	70,30	
8	8	0,000117	992.754,41	69,31	

Beispiel: Risikolebensversicherung gegen laufende Prämien, siehe auch Aufgabe 2 auf dem Übungsblatt zu diesem Thema.

Die Formel für die Berechnung einer Jahresprämie für eine Risikolebensversicherung lautet:

$$P = \frac{L_x - L_{x+n}}{L_x + L_{x+1} + \cdots + L_{x+n-1}} \cdot V$$

wobei wir die Anzahl der Lebenden eines Alters L_x in der Sterbetafel finden. Da es sich um eine Todesfallabsicherung handelt, verwenden wir wie in dem Übungsblatt angegeben die Tafel DAV 2008 T. Wie oben verwenden wir das Tabellenblatt DAV 2008 T Aufgaben mit einer Kopie der Sterbetafel.

In der Aufgabe a) wird eine 10-jährige Risikolebensversicherung für einen 30-Jährigen mit Versicherungssumme 10.000 € betrachtet, so dass sich die Formel ergibt zu

$$P = \frac{L_{30} - L_{40}}{L_{30} + L_{31} + \cdots + L_{39}} \cdot 10.000€$$

Um die Summe im Nenner zu berechnen, gibt es in Excel die Summenfunktion, so dass wir die folgende Formel in Excel erhalten, die wir in die Zelle E30 schreiben:

	A	B	C	D	E	F
1	DAV 2008 T agg 50% Männer und 50% Frauen					
2						
3	Alter	1. Ordnung				
4	x	q_x	L_x	e_x		
29	29	0,000524	983.908,53	48,81		
30	30	0,000532	983.393,45	47,84	9.806.899,12	=SUMME(C30:C39)
31	31	0,000548	982.870,78	46,87		
32	32	0,000571	982.332,65	45,89		
33	33	0,000603	981.771,74	44,92		
34	34	0,000644	981.179,73	43,94		
35	35	0,000693	980.547,85	42,97		
36	36	0,000750	979.868,82	42,00		
37	37	0,000815	979.133,92	41,03		
38	38	0,000892	978.336,42	40,06		
39	39	0,000982	977.463,74	39,10		
40	40	0,001087	976.503,87	38,14		

Um das Gesamtergebnis auszurechnen, können wir durch SUMME(C30:C39) teilen oder das Zwischenergebnis aus der Zelle E30 verwenden:

P =	7,03 €	=(C30-C40)/E30*10000

Beispiel: Rentenversicherung, siehe auch Aufgabe 2 auf dem Übungsblatt zu Erlebensfallleistungen. Hier verwenden wir die Tafel DAV 2004 R, die in das Tabellenblatt DAV 2004 R Aufgaben kopiert wurde. Auch hier wurden die Alter 0-4 Jahre entfernt, damit die Zeilennummer mit dem jeweiligen Alter übereinstimmt. Die Formel für die Berechnung des Erwartungswerts der Zeitrente lautet

$$E(L) = \frac{(L_{x+n} + L_{x+1} + \cdots + L_z)}{L_x} \cdot R$$

Dabei betrachten wir die Aufgabe 2 c) mit einer 30-jährigen Rentendauer in Höhe von 10.000 € im Jahr für einen 60-Jährigen, so dass sich die obige Formel ergibt zu

$$E(L) = \frac{(L_{60} + L_{61} + \cdots + L_{89})}{L_{60}} \cdot 10.000€$$

Diese Formel tragen wir in die Zelle D60 ein (die Formel sieht man unten im Bild):

	A	B	C	D	E
3	Alter	1. Ordnung			
4	x	q_x	L_x		
59	59	0,002117	961.300,17		
60	60	0,002228	959.265,09	276.827,24	=SUMME(C60:C89)/C60*10000
61	61	0,002364	957.128,33		
62	62	0,002526	954.865,68		
63	63	0,002709	952.453,69		

B. STERBETAFEL DAV 2008 T FÜR DIE RISIKOLEBENSVERSICHERUNG

Alter *x*	q_x	L_x	Alter *x*	q_x	L_x	Alter *x*	q_x	L_x
0	0,005601	1.000.000,00	41	0,001210	975.442,90	82	0,103937	400.475,04
1	0,000405	994.399,50	42	0,001354	974.263,10	83	0,116297	358.851,07
2	0,000331	993.996,77	43	0,001523	972.944,44	84	0,129958	317.117,94
3	0,000265	993.668,25	44	0,001721	971.462,64	85	0,145056	275.906,09
4	0,000211	993.404,93	45	0,001944	969.791,24	86	0,161683	235.884,39
5	0,000173	993.195,32	46	0,002188	967.905,97	87	0,179790	197.745,90
6	0,000145	993.024,00	47	0,002443	965.788,67	88	0,199235	162.193,16
7	0,000127	992.880,50	48	0,002706	963.429,25	89	0,219871	129.878,69
8	0,000117	992.754,41	49	0,002977	960.822,69	90	0,241530	101.322,13
9	0,000112	992.638,26	50	0,003264	957.962,33	91	0,264028	76.849,80
10	0,000116	992.527,08	51	0,003577	954.836,02	92	0,287137	56.559,34
11	0,000127	992.412,44	52	0,003924	951.421,04	93	0,310228	40.319,06
12	0,000150	992.286,41	53	0,004307	947.688,14	94	0,333125	27.810,96
13	0,000188	992.137,56	54	0,004725	943.606,45	95	0,356246	18.546,45
14	0,000246	991.951,54	55	0,005179	939.147,91	96	0,379562	11.939,35
15	0,000323	991.708,01	56	0,005673	934.284,06	97	0,403216	7.407,63
16	0,000414	991.388,19	57	0,006208	928.984,34	98	0,427387	4.420,76
17	0,000510	990.977,75	58	0,006789	923.217,20	99	0,451909	2.531,39
18	0,000587	990.472,85	59	0,007428	916.949,48	100	0,476781	1.387,43
19	0,000642	989.891,44	60	0,008144	910.138,38	101	0,502000	725,93
20	0,000670	989.256,43	61	0,008977	902.726,21	102	0,527561	361,51
21	0,000672	988.593,63	62	0,009972	894.622,89	103	0,553461	170,79
22	0,000659	987.929,29	63	0,011182	885.701,71	104	0,579690	76,27
23	0,000634	987.278,25	64	0,012657	875.797,80	105	0,606241	32,06
24	0,000604	986.652,80	65	0,014429	864.713,26	106	0,633101	12,62
25	0,000575	986.056,87	66	0,016514	852.236,75	107	0,660258	4,63
26	0,000550	985.490,38	67	0,018907	838.163,33	108	0,687696	1,57
27	0,000532	984.948,36	68	0,021599	822.316,60	109	0,715395	0,49
28	0,000524	984.424,36	69	0,024577	804.555,38	110	0,743332	0,14
29	0,000524	983.908,53	70	0,027830	784.781,82	111	0,771481	0,04
30	0,000532	983.393,45	71	0,031347	762.941,74	112	0,799811	0,01
31	0,000548	982.870,78	72	0,035036	739.026,19	113	0,828286	0,00
32	0,000571	982.332,65	73	0,039108	713.133,66	114	0,856866	0,00
33	0,000603	981.771,74	74	0,043262	685.244,43	115	0,885503	0,00
34	0,000644	981.179,73	75	0,047882	655.599,73	116	0,914144	0,00
35	0,000693	980.547,85	76	0,053091	624.208,30	117	0,942727	0,00
36	0,000750	979.868,82	77	0,059049	591.068,46	118	0,971181	0,00
37	0,000815	979.133,92	78	0,065900	556.166,76	119	0,993782	0,00
38	0,000892	978.336,42	79	0,073751	519.515,64	120	1,000000	0,00
39	0,000982	977.463,74	80	0,082687	481.200,85	121	1,000000	0,00
40	0,001087	976.503,87	81	0,092741	441.411,79			

Die vorliegende Tafel beruht auf der DAV 2008 T, Nichtraucher mit einem Mischungsverhältnis von 50% Männern und 50% Frauen.

STERBETAFEL DAV 2004 R FÜR DIE ERLEBENSFALLVERSICHERUNG

C.

Alter x	q_x	L_x	Alter x	q_x	L_x	Alter x	q_x	L_x
0	0,000075	1.000.000,00	41	0,000915	986.599,80	82	0,015700	847.440,01
1	0,000075	999.925,50	42	0,000970	985.697,06	83	0,018334	834.135,62
2	0,000075	999.851,01	43	0,001024	984.740,93	84	0,021407	818.843,00
3	0,000075	999.776,52	44	0,001078	983.733,05	85	0,024967	801.314,03
4	0,000075	999.702,03	45	0,001135	982.673,08	86	0,029064	781.307,62
5	0,000075	999.627,56	46	0,001197	981.558,24	87	0,033756	758.600,08
6	0,000075	999.553,08	47	0,001264	980.383,31	88	0,039070	732.992,78
7	0,000075	999.478,62	48	0,001333	979.144,11	89	0,045016	704.355,12
8	0,000075	999.404,16	49	0,001402	977.838,91	90	0,051402	672.647,87
9	0,000075	999.329,70	50	0,001469	976.467,98	91	0,057990	638.072,42
10	0,000075	999.255,25	51	0,001537	975.034,03	92	0,064677	601.070,92
11	0,000085	999.180,81	52	0,001603	973.535,89	93	0,071365	562.195,46
12	0,000090	999.096,37	53	0,001670	971.975,80	94	0,077933	522.074,38
13	0,000097	999.006,96	54	0,001736	970.353,09	95	0,084242	481.387,56
14	0,000116	998.910,55	55	0,001800	968.669,04	96	0,090141	440.834,51
15	0,000156	998.794,68	56	0,001867	966.925,44	97	0,095486	401.097,24
16	0,000210	998.638,87	57	0,001941	965.120,67	98	0,100386	362.798,27
17	0,000265	998.429,15	58	0,002022	963.247,85	99	0,104895	326.378,40
18	0,000399	998.164,57	59	0,002117	961.300,17	100	0,110856	292.143,11
19	0,000400	997.766,80	60	0,002228	959.265,09	101	0,115604	259.757,44
20	0,000400	997.368,19	61	0,002364	957.128,33	102	0,120348	229.728,57
21	0,000400	996.969,74	62	0,002526	954.865,68	103	0,125088	202.081,19
22	0,000400	996.571,45	63	0,002709	952.453,69	104	0,129823	176.803,36
23	0,000400	996.173,32	64	0,002902	949.873,49	105	0,134554	153.850,22
24	0,000410	995.775,35	65	0,003105	947.117,43	106	0,139277	133.149,13
25	0,000412	995.367,08	66	0,003308	944.177,11	107	0,143994	114.604,52
26	0,000412	994.957,49	67	0,003576	941.054,24	108	0,148702	98.102,16
27	0,000417	994.548,07	68	0,003864	937.689,50	109	0,153399	83.514,17
28	0,000428	994.133,84	69	0,004161	934.066,74	110	0,158081	70.703,22
29	0,000439	993.708,35	70	0,004472	930.180,09	111	0,162747	59.526,39
30	0,000445	993.272,11	71	0,004814	926.020,79	112	0,167392	49.838,65
31	0,000454	992.830,60	72	0,005193	921.562,92	113	0,172010	41.496,08
32	0,000472	992.380,35	73	0,005606	916.777,71	114	0,176597	34.358,34
33	0,000504	991.911,95	74	0,006084	911.638,25	115	0,181144	28.290,78
34	0,000549	991.412,52	75	0,006662	906.091,85	116	0,185644	23.166,07
35	0,000589	990.868,23	76	0,007333	900.055,46	117	0,190087	18.865,43
36	0,000635	990.285,11	77	0,008113	893.455,80	118	0,194461	15.279,37
37	0,000690	989.656,77	78	0,009061	886.207,20	119	0,198752	12.308,13
38	0,000745	988.974,40	79	0,010231	878.177,27	120	0,202945	9.861,86
39	0,000801	988.237,62	80	0,011691	869.192,64	121	1,000000	7.860,45
40	0,000858	987.446,53	81	0,013493	859.030,91			

Die Erlebensfalltafel hängt neben dem Alter auch vom Geburtsjahr ab. Die vorliegende Tafel beruht auf der DAV 2004 R, Aggregattafel, Geburtsjahr 1965, Mischungsverhältnis von 50% wie oben.

D. LÖSUNGEN ZU DEN ÜBUNGSBLÄTTERN

Lösungen: Einführung in die Lebensversicherung

1. Hier einige Beispiele: Rentenversicherung und Ausbildungsversicherung gehören zur Lebensversicherung, Kranken- und Pflegeversicherung gehören zur Krankenversicherung. Zur Schaden- und Unfallversicherung zählen zum Beispiel, Kfz-Haftpflichtversicherung, Hausratversicherung, Fahrradversicherung, Feuer- bzw. Gebäudeversicherung, Handyversicherung.

2. Versicherungsunternehmen gleichen immer einen finanziellen Nachteil aus. So hilft eine Krankenversicherung nicht gegen Krankheit an sich, aber gegen hohe Arzt- und Krankenhauskosten.
   Risikolebensversicherung: gleicht den finanziellen Nachteil aus, der einer Familie entsteht, wenn beispielsweise der Hauptverdiener durch Tod ausfällt, sie stellt die Versorgung der Familie sicher.
   Rentenversicherung: gleicht das Risiko aus, dass der Versicherungsnehmer im Ruhestand sehr lange lebt und somit seine Ersparnisse nicht ausreichen, um den Lebensunterhalt zu decken.
   Ausbildungsversicherung: sichert die Finanzierung der Ausbildung, Sparprodukt, in das zusätzlich Absicherungsbausteine integriert werden können, so dass die Finanzierung der Ausbildung, z. B. auch bei Tod der Eltern gesichert ist.

3. Abschluss der Versicherung im Jahr 2020

	Tod 2030	Tod 2045	Tod 2060
Risikolebensversicherung (Laufzeit 15 Jahre)	2030	-	-
Kapitalbildende Lebensversicherung (Laufzeit 30 Jahre)	2030	2045	2050
Sofortbeginnende lebenslange Rentenversicherung	2020-2030	2020-2045	2020-2060
Um 30 Jahre aufgeschobene, lebenslange Rentenversicherung	-	-	2050-2060

4. Im Jahr 1965 im Alter von 90 Jahren schloss Jeanne Calment mit dem damals 47-jährigen Rechtsanwalt Andre-François Raffray einen Vertrag ab: Nach ihrem Tod sollte er ihre Wohnung erhalten. Dafür verpflichtet sich Raffray ihr eine monatliche, lebenslange Rente von 2.500 € zu zahlen. Scheinbar ein gutes Geschäft, denn zum Zeitpunkt des Vertrages hatte Calment eine restliche durchschnittliche Lebenserwartung von weniger als 5 Jahren. Raffray verstarb 30 Jahre später, doch Jeanne Calment lebte zu diesem Zeitpunkt immer noch. Was für ein unglücklicher Zufall, dass Raffray dieses Geschäft ausgerechnet mit der Frau eingegangen war, die alle anderen Menschen überleben sollte! So musste seine Witwe die Rentenzahlungen leisten, die dann in Summe den Wert der Wohnung um ein Vielfaches überstiegen.
   Das Problem des Rechtsanwalts Raffray bestand darin, dass ein Ereignis eingetreten ist, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit zwar klein, aber eben doch nicht vernachlässigbar ist. Bei einer einzelnen Person kann die Schwankung um den Erwartungswert sehr groß sein. Einem Versicherungsunternehmen kann dies aufgrund des Gesetzes der Großen Zahlen nicht passieren. Es schließt Tausende von Verträgen ab. In seinem Bestand befinden sich viele 90-jährige Rentner. Darunter gibt es einige, die die erwartete Restlebensdauer deutlich überschreiten, aber auch andere, die darunter bleiben. Wenn der Bestand hinreichend groß ist, werden die Versicherungsnehmer im Mittel so alt wie die theoretisch ermittelte Lebenserwartung.

Lösungen: Rechnungsgrundlagen

1.a) Bettina hält das von Antonia zur Verfügung gestellte Geld auf Vorrat. Es liegt im Schließfach und ändert seinen Betrag während der 5 Jahre nicht. Antonia muss heute also 100 € bezahlen und erhält nach 5 Jahren genau diese wieder zurück.

1.b) Bettina hält das von Antonia zur Verfügung gestellte Geld auf Vorrat. Jedes Jahr aber muss Bettina von dem Geld im Schließfach 1 € nehmen, um die Gebühren für das Schließfach zu bezahlen. Nach 5 Jahren zahlt Bettina 100 € an Antonia, musste bis dahin aber auch 5 € an Gebühren bezahlen. Damit das Geschäft für Bettina nicht zum Verlust wird, muss Antonia heute also 100 € + 5 € = 105 € zur Verfügung stellen.

1.c) Sei X der Betrag, den Antonia zu Anfang bezahlen muss. Dann muss gelten: 100 € = $X \cdot 1{,}01^5$. Durch Umformen erhält man

$$X = 100\text{ €} / (1{,}01^5) = 95{,}15\text{ €}:$$

(Alternativ: Es muss gelten: 100 € = $X + 5 \cdot 1$ €, also $X = 100\text{ €} - 5\text{ €} = 95$ €.)

2.a) Bettina muss in 5 Jahren jeder der 1.000 Geschäftspartnerinnen 100 € zahlen. Sie muss also 1.000 · 100 € = 100.000 € erhalten haben. Also muss jede am Anfang 100 € zur Verfügung stellen.

2.b) Nach Ablauf der 5 Jahre sind 5 · 20 = 100 der Geschäftspartnerinnen von Bettina verstorben. Es leben also nur noch 1.000 – 100 = 900 Geschäftspartnerinnen, an die Bettina jeweils 100 € zahlen muss. Insgesamt muss Bettina also nur 900 · 100 € = 90.000 € auszahlen. Deshalb ist es ausreichend, wenn jede der 1.000 Geschäftspartnerinnen zu Beginn nur 90.000 € / 1.000 = 90 € zur Verfügung stellt.

3.a) Die Verteilung der Anzahl der nach 5 Jahren noch lebenden Geschäftspartnerinnen ist $B(1.000;0{,}9)$, also eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 1.000$ und $p = 0{,}9$.

3.b) Der Erwartungswert E der $B(1.000;0{,}9)$ ist

$$E = n \cdot p = 1.000 \cdot 0{,}9 = 900;$$

die Varianz V der $B(1.000;0;9)$ ist

$$V = n \cdot p \cdot (1 - p) = 1.000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 90:$$

Die Verteilung kann somit approximiert werden durch die Normalverteilung N(900;90).

3.c) Das 99%-Quantil der $N(0;1)$-Verteilung beträgt approximativ 2,326. Für die Anzahl der überlebenden Geschäftspartnerinnen L, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% nicht überschritten wird, gilt damit

$$2{,}326 \approx (L - 900)/9{,}4868$$

und somit nach Umformung

$$L \approx 2{,}326 \cdot 9{,}4868 + 900 = 922{,}07.$$

Für den gefragten Betrag X gilt somit

$$X = 100€ \cdot 922{,}07/1000 = 92{,}21€.$$

Die Differenz

$$X - E = 92{,}21€ - 90€ = 2{,}21€$$

stellt den Sicherheitspuffer für Bettina dar.

Lösungen: Sterbetafeln

1.a) Die Wahrscheinlichkeit p_x, dass ein heute x-Jähriger das nächste Jahr überlebt, ist die Gegenwahrscheinlichkeit von q_x. Damit ergibt sich $p_x = 1 - q_x$.

1.b) Um die ersten fünf Jahre zu überleben, muss ein heute x-Jähriger zunächst $x + 1$ Jahre alt werden (mit Wahrscheinlichkeit p_x), dann $x + 2$ Jahre (mit Wahrscheinlichkeit p_{x+1}), dann $x + 3$ Jahre (mit Wahrscheinlichkeit p_{x+2}) usw. Es ergibt sich insgesamt

$$(1-q_x)(1-q_{x+1})(1-q_{x+2})(1-q_{x+3})(1-q_{x+4}).$$

2.a) Wir berechnen

$$(1-q_{52})\cdot(1-q_{53}) = 0{,}9918.$$

2.b) Dafür muss der Versicherungsnehmer zunächst einmal das Alter 55 erreichen und dann versterben, also

$$(1-q_{52})\cdot(1-q_{53})\cdot(1-q_{54})q_{55} = 0{,}0051.$$

3.) Für die DAV 2008 T ergibt sich $e_5 = 72{,}28$ und $e_{30} = 47{,}84$. Im Tabellenblatt „DAV 2008 T Aufgaben" der Excelmappe unter https://werde-aktuar.de/für-lehrende/schule ist in der Spalte D die in dieser Aufgabe angegebene Formel für die Lebenserwartung für jedes Alter hinterlegt.

Der angegebenen Rekursionsformel liegt folgende Überlegung zugrunde: Im letzten Jahr beträgt die Sterbewahrscheinlichkeit 1,0. Der Versicherungsnehmer wird irgendwann im Laufe des Jahres sterben. Wir gehen von einer mittleren restlichen Lebenserwartung von einem halben Jahr aus. Betrachten wir nun einen x-Jährigen. Dieser stirbt mit Wahrscheinlichkeit q_x mit einer restlichen Lebenserwartung von $\frac{1}{2}$ und überlebt mit Wahrscheinlichkeit $1 - q_x$. Falls er zu den Überlebenden gehört, beträgt seine aktuelle, restliche durchschnittliche Lebenserwartung

$$e_{x+1} + 1.$$

4.) Wenn die Versicherung bei einer Risikoversicherung Aufschläge auf die realen Sterblichkeiten nimmt, werden die Tarife teuer. Dies bedeutet, dass die Versicherung zunächst mehr Beitrag einnimmt, als sie benötigt, um die Versicherungsleistung zu zahlen. Damit reduziert sich insbesondere das Risiko, einen Verlust zu erleiden. In Realität entstehen deshalb sogar Gewinne, die aber aufgrund gesetzlicher Vorgaben nach genauen Vorschriften größtenteils wieder an den Kunden zurückgezahlt werden.

Um bei einer Rentenversicherung vorsichtig zu kalkulieren, sind Abschläge auf die realen Sterblichkeiten notwendig. Dadurch steigt die Wahrscheinlichkeit zu überleben, und es werden höhere Lebenserwartungen angenommen, als tatsächlich eintreten. Es ist zudem ein Langlebigkeitstrend zu beobachten. Das bedeutet, dass die Menschen mit zunehmendem Geburtsjahr immer älter werden. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, verwenden die Versicherungsunternehmen zur Kalkulation von Rentenversicherungen Sterbetafeln, bei denen die Sterblichkeit nicht nur vom Alter, sondern auch vom Geburtsjahr abhängt. Man spricht dann von einer 2-dimensionalen Sterbetafel oder einer Generationentafel.

D. Lösungen zu den Übungsblättern

Lösungen: Risikolebensversicherung

1.) Es gibt eine Reihe verschiedener Kriterien, die das Risiko einer Zahlung beeinflussen können, zum Beispiel

- Berufsrisiken (Riskante Berufe wie z. B. Dachdeckerinnen)
- Freizeitrisiken (z. B. riskante Hobbys wie Fallschirmspringen)
- Gesundheitsrisiken (z. B. Vorerkrankungen, Raucherinnen)
- Bildungsstand (Personen mit einem Hochschulabschluss haben in der Regel eine höhere Lebenserwartung, da sie keine körperlich anstrengenden Tätigkeiten ausüben)

Ob diese Kriterien auch tatsächlich zu einer Preiserhöhung für eine Risikolebensversicherung führen würden, hängt vom Preismodell der jeweiligen Versicherungsgesellschaft ab.

2.) Anhand der verwendeten DAV 2008 T im Anhang B für die Risikolebensversicherung können wir folgende Werte nachschlagen:

2.a) $q_{20} = 0{,}000670$; $E(L) = 0{,}000670 \cdot 100.000€ = 67{,}00€$

2.b) $q_{40} = 0{,}001087$; $E(L) = 0{,}001087 \cdot 100.000€ = 108{,}70€$

2.c) $q_{60} = 0{,}008144$; $E(L) = 0{,}008144 \cdot 100.000€ = 814{,}40€$

3.) In der Sterbetafel für die Risikolebensversicherung ist die Anzahl der 30-jährigen Lebenden angegeben als $L_{30} = 983.393{,}45$

3.a) Nach der Laufzeit von 10 Jahren ist die versicherte Person 40 Jahre alt:

$$L_{40} = 976.503.87;\ E(L) = \frac{983.393{,}45 - 976.503{,}87}{983.393{,}45} \cdot 10.000€ = 70{,}06€$$

3.b) Nach der Laufzeit von 20 Jahren ist die versicherte Person 50 Jahre alt:

$$L_{50} = 957.962{,}33;\ E(L) = \frac{983.393{,}45 - 957.962{,}33}{983.393{,}45} \cdot 10.000€ = 258{,}61€$$

3.c) Nach der Laufzeit von 30 Jahren ist die versicherte Person 60 Jahre alt:

$$L_{60} = 910.138{,}38;\ E(L) = \frac{983.393{,}45 - 910.138{,}38}{983.393{,}45} \cdot 10.000€ = 744{,}92€$$

4.) In der Sterbetafel für die Risikolebensversicherung finden wir $L_{40} = 976.503{,}87$ und $L_{50} = 957.962{,}33$. Damit ergibt sich

$$E(L) = \frac{976.503{,}87 - 957.962{,}33}{976.503{,}87} \cdot 300.000€ = 5.696{,}31€$$

Lösungen: Risikolebensversicherung gegen laufende Prämien

1.) In der Sterbetafel für die Risikolebensversicherung im Anhang ist die Anzahl der 30-jährigen Lebenden angegeben als $L_{30} = 983.393{,}45$

1.a) Nach der Laufzeit von 10 Jahren ist die versicherte Person 40 Jahre alt:

$$L_{40} = 976.503.87;\ E(L) = \frac{983.393{,}45 - 976.503{,}87}{983.393{,}45} \cdot 10.000€ = 70{,}06€$$

1.b) Nach der Laufzeit von 20 Jahren ist die versicherte Person 50 Jahre alt:

$$L_{50} = 957.962{,}33;\ E(L) = \frac{983.393{,}45 - 957.962{,}33}{983.393{,}45} \cdot 10.000€ = 258{,}61€$$

1.c) Nach der Laufzeit von 30 Jahren ist die versicherte Person 60 Jahre alt:

$$L_{60} = 910.138{,}38;\ E(L) = \frac{983.393{,}45 - 910.138{,}38}{983.393{,}45} \cdot 10.000€ = 744{,}92€$$

2.) Wie in der ersten Aufgabe verwenden wir $L_{30} = 983.393{,}45$

2.a) Nach der Laufzeit von 10 Jahren ist die versicherte Person 40 Jahre alt. Die jährliche Prämie kann man nach der angegebenen Formel wie folgt ausrechnen:

$$p = \frac{(L_{30} - L_{40})}{(L_{30} + L_{31} + \ldots + L_{39})} \cdot 10.000€;$$

$$p = \frac{(983.393{,}45 - 976.503{,}87)}{(983.393{,}45 + 982.870{,}78 + \ldots + 977.463{,}74} \cdot 10.000€ = 7{,}03€$$

Die Einmalprämie aus Aufgabe 1a) beträgt 70,06 €, geteilt durch 10 Jahre würde man eine jährliche Prämie von 7,01 € erwarten. Da bei manchen Versicherten im Laufe der 10 Jahre der Versicherungsfall auftritt, ist der Erwartungswert der Prämienzahlungen nach 10-jähriger Vertragsdauer etwas geringer als das 10-fache der Jahresprämie, deshalb muss die Jahresprämie höher sein als $\frac{1}{10}$ der Einmalprämie.

2.b) Nach der Laufzeit von 20 Jahren ist die versicherte Person 50 Jahre alt:

$$p = \frac{(983.393{,}45 - 957.962{,}33)}{(983.393{,}45 + 982.870{,}78 + \ldots + 960.822{,}69)} \cdot 10.000€ = 13{,}04€$$

Die Einmalprämie aus Aufgabe 1b) beträgt 258,61 €, geteilt durch 20 Jahre würde man eine jährliche Prämie von 12,93 € erwarten.

2.c) Nach der Laufzeit von 30 Jahren ist die versicherte Person 60 Jahre alt:

$$p = \frac{(983.393{,}45 - 910.138{,}38)}{(983.393{,}45 + 982.870{,}78 + \ldots + 916.949{,}48)} \cdot 10.000€ = 25{,}34€$$

Die Einmalprämie aus Aufgabe 1c) beträgt 744,92 €, geteilt durch 30 Jahre würde man eine jährliche Prämie von 24,83 € erwarten.

3.) Aus der Sterbetafel für die Risikolebensversicherung DAV 2008 T aus dem Anhang B ergibt sich $L_{40} = 976.503,87$; $L_{50} = 957.962,33$. Damit berechnen wir die einmalige Prämie wie folgt:

$$E(L) = \frac{(976.503{,}87 - 957.962{,}33)}{976.503{,}87} \cdot 300.000€ = 5.696{,}31€$$

Die laufende, jährliche Prämie ergibt sich als

$$P = \frac{(976.503{,}87 - 957.962{,}33)}{(976.503{,}87 + 975.442{,}90 + \cdots + 960.822{,}69)} \cdot 300.000€ = 413{,}46€$$

und 413,46 € / 12 = 34,45 € ist die monatliche Prämie.

Lösungen: Erlebensfallleistungen

1.) Gemäß der Sterbetafel für die Erlebensfallversicherung ergibt sich für das Alter 65 $L_{65} = 947.117{,}43$

1.a.) $L_{20} = 997.368{,}19; E(L) = \frac{947.117{,}43}{997.368{,}19} \cdot 100.000€ = 94.961{,}66€$

1.b.) $L_{30} = 993.272{,}11; E(L) = \frac{947.117{,}43}{993.272{,}11} \cdot 100.000€ = 95.353{,}27€$

1.c.) $L_{40} = 987.446{,}53; E(L) = \frac{947.117{,}43}{987.446{,}53} \cdot 100.000€ = 95.915{,}82€$

2.) In der Sterbetafel für die Erlebensfallversicherung ist die Anzahl der 60-jährigen Lebenden angegeben als $L_{60} = 959.265{,}09$

2.a) Nach der Formel beträgt der Erwartungswert der 5-jährigen Rente ab Alter 60:

$$E(L) = \frac{(L_{60} + L_{61} + \cdots + L_{64})}{L_{60}} \cdot 10.000€ = \frac{959.265{,}09 + \cdots + 949.873{,}49}{959.265{,}09} \cdot 10.000€$$

$$= 49.762{,}95€$$

2.b) 15-jährige Rente ab Alter 60:

$$E(L) = \frac{(L_{60} + L_{61} + \cdots + L_{74})}{L_{60}} \cdot 10.000€ = \frac{959.265{,}09 + \cdots + 911.638{,}25}{959.265{,}09} \cdot 10.000€$$

$$= 146.819{,}38€$$

2.c) 30-jährige Rente ab Alter 60:

$$E(L) = \frac{(L_{60} + L_{61} + \cdots + L_{89})}{L_{60}} \cdot 10.000€ = \frac{959.265{,}09 + \cdots + 704.355{,}12}{959.265{,}09} \cdot 10.000€$$

$$= 276.827{,}24€$$

3.) In der Sterbetafel für die Erlebensfallversicherung ist die Anzahl der 30-jährigen Lebenden angegeben als $L_{30} = 993.272{,}11$

Nach der Formel beträgt der Erwartungswert der lebenslangen Rente ab Alter 65:

$$E(L) = \frac{(L_{65} + L_{66} + \cdots + L_{121})}{L_{30}} \cdot 10.000€ = \frac{947.117{,}43 + \cdots + 9.861{,}86}{993.272{,}11} \cdot 10.000€$$

$$= 291.011{,}19€$$

Schließt man den Vertrag erst im Alter 60 ab, ist im Nenner mit $L_{60} = 959.265{,}09$ zu rechnen:

$$E(L) = \frac{(L_{65} + L_{66} + \cdots + L_{121})}{L_{60}} \cdot 10.000€ = \frac{947.117{,}43 + \cdots + 9.861{,}86}{959.265{,}09} \cdot 10.000€$$

$$= 301.327{,}86€$$

Lösungen: Überschussbeteiligung

1.) Bei einer Risikolebensversicherung wird mit Sterblichkeiten gerechnet, die über den beobachteten Sterblichkeiten liegen. Die Leistung wird passend zu diesen Sterblichkeiten ermittelt. Wenn nun weniger Versicherungsnehmer sterben, muss vergleichsweise wenig Todesfallleistung gezahlt werden. Es werden also im Vergleich zur Leistung zu viele Beiträge eingenommen. Daraus ergibt sich ein Gewinn. Bei einer Rentenversicherung wird mit Sterblichkeiten gerechnet, die unter den beobachteten Sterblichkeiten liegen. Die Leistung wird passend zu diesen Sterblichkeiten ermittelt. Wenn die Versicherungsnehmer nun häufiger, also früher sterben als nach den Sterbetafeln vorgegeben, müssen die Renten nicht so lange gezahlt werden. Wieder wird also im Vergleich zur Leistung ein zu hoher Beitrag eingenommen. Daraus ergibt sich ein Gewinn.

2.) Der Gesetzgeber handelt im Interesse der Versicherungsnehmer. Ihm ist es wichtig, dass die Versicherungsunternehmen ihren Verpflichtungen nachkommen. Dies ist gerade bei Lebensversicherungen eine besonders komplexe Aufgabe, da hier die Leistung – beispielsweise bei einer Rentenversicherung – erst sehr spät erfolgt. Über Jahre hinweg werden Beiträge gezahlt, erst nach Jahrzehnten erfolgt die erste Rentenzahlung. Zudem sind die Versicherungsnehmer auf die Zahlungen angewiesen, um ihren Lebensunterhalt zu finanzieren. Dafür ist es wichtig, dass die Unternehmen ihnen keine falschen, übertriebenen Versprechungen machen, die sie am Ende nicht halten können. Deshalb werden sie dazu verpflichtet, ihre Beiträge so vorsichtig zu kalkulieren, dass sie die zu Beginn garantierte Leistung am Ende in jedem Fall zahlen können. Die Überschussbeteiligung ist dann für den Versicherungsnehmer das Sahnehäubchen.

3.) Rentenversicherungen werden mit Sterbetafeln berechnet, die Sicherheitsabschläge enthalten. Dadurch wird von einer besonders hohen Lebenserwartung ausgegangen, die zumindest bei Vertragsabschluss unrealistisch hoch erscheint. Die daraus resultierende, bei Vertragsabschluss garantierte Rente ist deshalb niedriger als die Rente, die man erwarten würde, wenn man von realistischen Sterblichkeiten ausgeht. In diesen Punkten ist die Aussage korrekt. Allerdings gibt es auch einige Aspekte, die nicht vollständig oder nicht korrekt dargestellt werden:

- Versicherungsunternehmen berechnen ihre Produkte nicht mit vorsichtigen Annahmen, um ihre Gewinne zu maximieren, sondern weil dies gesetzlich vorgeschrieben ist.

- Sie behalten nicht den gesamten Gewinn, sondern geben einen Großteil an die Kunden in Form einer Überschussbeteiligung weiter. Dazu sind sie ebenfalls gesetzlich verpflichtet.

- Wenn nicht nur die Garantie, sondern auch die Überschussbeteiligung berücksichtigt wird, ergibt sich, dass Lebensversicherungsprodukte für den Kunden durchaus attraktive Renditen bieten. Da fast automatisch Gewinne entstehen und diese mit dem Kunden geteilt werden müssen, ist in der Praxis auch immer mit Überschüssen zu rechnen, selbst wenn es aufgrund des Vorsichtigkeitsprinzips nicht zulässig ist, diese bereits bei Vertragsabschluss zu versprechen.

Lösungen: Leistungsbarwerte

1.) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine *x*-jährige Person die nächsten *n* Jahre überlebt, kann man als Verhältnis der Lebenden des Alters $x + n$ und des Alters x ermitteln:

1.a) $$p_{20} = \frac{L_{21}}{L_{20}} = \frac{988.593{,}63}{989.256{,}43} = 0{,}99933,\quad {}_{20}p_{20} = \frac{L_{40}}{L_{20}} = \frac{976.503{,}87}{989.256{,}43} = 0{,}98711$$

$$\text{und}\quad {}_{50}p_{20} = \frac{L_{70}}{L_{20}} = \frac{784.781{,}82}{989.256{,}43} = 0{,}79330$$

1.b) $$p_{60} = \frac{L_{61}}{L_{60}} = \frac{902.726{,}21}{910.138{,}38} = 0{,}99186,\quad {}_{20}p_{60} = \frac{L_{80}}{L_{60}} = \frac{481.200{,}85}{910.138{,}38} = 0{,}52871$$

$$\text{und}\quad {}_{50}p_{60} = \frac{L_{110}}{L_{60}} = \frac{0{,}14}{910.138{,}38} = 0{,}0000001$$

2.) Für eine 20-jährige Person, 30-jährige Dauer mit Versicherungssumme $S = 100.000$ € ergibt sich:

2.a) Für den Rechnungszins von 0% ergibt sich

$$LBW = S \cdot (1 - {}_{n}p_{x}) = 100.000€ \cdot (1 - {}_{30}p_{20}) = 100.000€ \cdot \left(1 - \frac{957.962{,}33}{989.256{,}43}\right) = 3.163{,}40€$$

2.b) Mit dem Abzinsungsfaktor $v = \frac{1}{1+0{,}02} = 0{,}9804$ ergibt sich

$$LBW = 100.000€ \cdot \left(v \cdot q_{20} + v^2 \cdot \frac{L_{21}}{L_{20}} \cdot q_{21} + \cdots + v^{30} \cdot \frac{L_{49}}{L_{20}} q_{49}\right) = 2.156€$$

2.c) Die Formel für die jährliche Prämie lautet $P = \frac{LBW}{(1 + v \cdot {}_{1}p_{x} + \cdots + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_{x})}$.

Dabei ist $LBW = 3.163{,}40$ € aus Aufgabe 2a). Da der Zins 0 ist, kann man den Nenner auch berechnen als

$$\frac{L_{20}}{L_{20}} + \frac{L_{21}}{L_{20}} + \cdots + \frac{L_{49}}{L_{20}} = \frac{L_{20} + \cdots + L_{49}}{L_{20}} = 29{,}69.$$

Die jährliche Prämie ergibt sich damit zu $\frac{3.163{,}40€}{29{,}69} = 106{,}55€$

3.) Die jährliche Prämie für eine Versicherung wird nach der folgenden Formel berechnet:

$$P = \frac{LBW}{(1 + v \cdot {}_{1}p_{x} + \cdots + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_{x})}.$$

3.a) Mit dem Rechnungszins von 0% und dem Leistungsbarwert von 3.163,40 € ergibt sich

$$P = \frac{3.163{,}40€}{\left(1 + \frac{L_{21}}{L_{20}} + \cdots + \frac{L_{49}}{L_{20}}\right)} = 106{,}24€$$

3.b) Mit dem Rechnungszins von 2% ergibt sich

$$P = \frac{2.155{,}51€}{\left(1 + \frac{1}{1{,}02} \cdot \frac{L_{21}}{L_{20}} + \cdots + \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^{29} \cdot \frac{L_{49}}{L_{20}}\right)} = 94{,}99€$$

1. Auflage

Hohenstaufenring 47–51
50674 Köln
www.aktuar.de
info@aktuar.de
Telefon 0221/912554-0
Telefax 0221/912554-44

Gestaltung: Eins 64 GbR

Wir schaffen neues Wissen

DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

DGVFM

DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR VERSICHERUNGS- UND FINANZMATHEMATIK e.V.